

Introdução à Lógica Computacional

Aula: Validade mediante regras de inferência e equivalência

Agenda

- Equivalências notáveis
- Exercícios

Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida. Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar a sua interpretação.

a) $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$

b) $\vee Q \rightarrow R$

c) $(P \vee R) \rightarrow (Q \leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$

d) $(PQ \vee \text{True})$

e) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$

f) $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

Definição lexical da lógica proposicional

- **Símbolos verdade:** true e false;
- **Símbolos proposicionais:** P, Q, R, S, P₁, P₂, P₃, etc;
- **Conectivos proposicionais:** \neg (não), \vee (ou inclusivo), \wedge (e), \rightarrow (implica ou “se, então”) e \leftrightarrow (equivalência, bi-implicação ou “se e somente se”); e
- **Símbolos de pontuação:** (e).

Definição Sintática

1. Todo símbolo verdade é uma fórmula;
2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
3. Se P é uma fórmula, então a sua negação ($\neg P$) também é uma fórmula;
4. Se P e Q são fórmulas, então:
 - 4.1. A disjunção de P e Q ($P \vee Q$) também é uma fórmula;
 - 4.2. A conjunção de P e Q ($P \wedge Q$) também é uma fórmula;
 - 4.3. A implicação de P em Q ($P \rightarrow Q$) também é uma fórmula;
 - 4.4. A bi-implicação de P e Q ($P \leftrightarrow Q$) também é uma fórmula;

Definição semântica: Tabela verdade estendida

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \vee B$	$A \& B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$	$A B$	$A \downarrow B$
T	T	F	F	T	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	F	T	T

OU exclusivo

$\sim(A \text{ e } B)$

$\sim(A \text{ ou } B)$

Corolário

- Nem sempre é possível demonstrar a validade de um argumento apenas com as regras de inferência
- Regra de Substituição de proposições equivalentes, ou seja:
 - Uma proposição qualquer P ou apenas parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, assim a proposição Q que se obterá, também será equivalente a P .
- Para empregar a Regra de Substituição usamos as proposições equivalentes, que podem substituir-se mutuamente onde quer que ocorram.

Equivalências Notáveis

$$H \Leftrightarrow G$$



Significa é equivalente a ou equivale ou pode ser substituído por

$$A \Leftrightarrow B$$

Significa que A é equivalente a B
A pode ser substituído por B e vice-versa

Identificação	Fórmula H	Fórmula G
Dupla Negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de Identidade	$E \vee \text{False}$	E
	$E \wedge \text{True}$	E
Propriedades Complementares	$E \vee \neg E$	True
	$E \wedge \neg E$	False
Leis de Morgan	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$
Propriedades de Substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades Comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades Associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades Distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova Condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

Regras de inferências lógicas

- **Adição:** $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{Q}{P \vee Q}$
- **Conjunção:** $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
- **Simplificação Disjuntiva:** $\frac{(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)}{P}$
- **Absorção:** $\frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow (P \wedge Q)}$
- **Modus Ponens:** $\frac{P \wedge (P \rightarrow Q)}{Q}$
- **Modus Tollens:** $\frac{\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)}{\neg P}$
- **Silogismo Hipotético:** $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow R}$
- **Silogismo Disjuntivo:** $\frac{(P \vee Q) \wedge \neg P}{Q} \quad \frac{(P \vee Q) \wedge \neg Q}{P}$
- **Dilema Construtivo:** $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \vee R) \rightarrow (Q \vee G))} \quad \frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge G))}$

Precedência dos conectivos: como devo avaliar

\neg (maior precedência)

\rightarrow e \leftrightarrow (precedência intermediária)

Da esquerda para a direita

\vee e \wedge (menor precedência)

Ex: $P \vee Q \rightarrow R \equiv P \vee (Q \rightarrow R)$

Exemplos

$$\neg P \wedge Q \leftrightarrow R \equiv (\neg P) \wedge (Q \leftrightarrow R)$$

$$P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge R$$

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

Exercícios

1. Verificar a validade dos seguintes argumentos utilizando as regras de inferência e equivalências:

a. $p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$

Exercícios

1. Verificar a validade dos seguintes argumentos utilizando as regras de inferência e equivalências:

a. $p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$

1.	$p \rightarrow \sim q$	P_1	Premissa 1
2.	q	P_2	Premissa 2

Exercícios

1. Verificar a validade dos seguintes argumentos utilizando as regras de inferência e equivalências:

a. $p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$

1.	$p \rightarrow \sim q$	P_1
2.	q	P_2
3.	$\sim\sim q \rightarrow \sim p$	1: CP

Premissa 1
Premissa 1



IX.	Contraposição	CP	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
-----	---------------	----	---

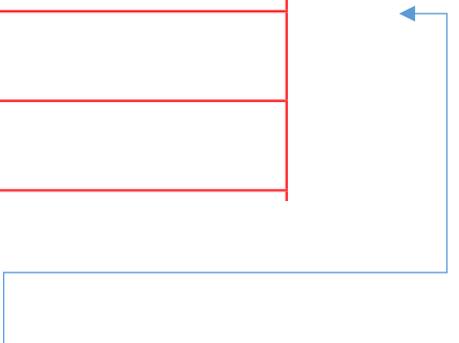
Exercícios

1. Verificar a validade dos seguintes argumentos utilizando as regras de inferência e equivalências:

a. $p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$

1.	$p \rightarrow \sim q$	P_1
2.	q	P_2
3.	$\sim\sim q \rightarrow \sim p$	1: CP
4.	$q \rightarrow \sim p$	3: DN

Premissa 1
Premissa 2



V.	Dupla Negação	DN	$p \Leftrightarrow \sim\sim p$
----	---------------	----	--------------------------------

Exercícios

1. Verificar a validade dos seguintes argumentos utilizando as regras de inferência e equivalências:

a. $p \rightarrow \sim q, \quad q \vdash \sim p$

1.	$p \rightarrow \sim q$	P_1
2.	q	P_2
3.	$\sim\sim q \rightarrow \sim p$	1: CP
4.	$q \rightarrow \sim p$	3: DN
5.	$\sim p$	2, 4: MP

Premissa 1

Premissa 2



$$b. \quad p \rightarrow q, \quad r \rightarrow \sim q \quad \vdash \quad p \rightarrow \sim r$$

b. $p \rightarrow q, \quad r \rightarrow \sim q \vdash p \rightarrow \sim r$

1.	$p \rightarrow q$	P_1
2.	$r \rightarrow \sim q$	P_2
3.	$\sim\sim q \rightarrow \sim r$	2: CP
4.	$q \rightarrow \sim r$	3: DN
5.	$p \rightarrow \sim r$	1, 4: SH

c. $p \vee (q \wedge r), p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

c. $p \vee (q \wedge r), p \vee q \rightarrow s \vdash p \vee s$

1.	$p \vee (q \wedge r)$	P_1
2.	$p \vee q \rightarrow s$	P_2
3.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1: DIST
4.	$p \vee q$	3: SIMP
5.	s	2, 4: MP
6.	$p \vee s$	5: AD

$$d. \quad p \vee q \rightarrow r \wedge s, \quad \sim s \vdash \sim q$$

d. $p \vee q \rightarrow r \wedge s, \quad \sim s \vdash \sim q$

1.	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	P_1
2.	$\sim s$	P_2
3.	$\sim(p \vee q) \vee (r \wedge s)$	1: COND
4.	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)$	3: DM
5.	$\sim s \vee \sim r$	2: AD
6.	$\sim(s \wedge r)$	5: DM
7.	$\sim p \wedge \sim q$	3, 5: MT
8.	$\sim q$	7: SIMP

$$(p \vee \sim q) \vee r, \quad \sim p \vee (q \wedge \sim p) \vdash q \rightarrow r$$

$$(p \vee \sim q) \vee r, \quad \sim p \vee (q \wedge \sim p) \quad \vdash \quad q \rightarrow r$$

1.	$(p \vee \sim q) \vee r$	P_1
2.	$\sim p \vee (q \wedge \sim p)$	P_2
3.	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim p)$	2: DIST
4.	$(\sim p \vee q) \wedge \sim p$	3: ID
5.	$\sim p$	4: SIMP
6.	$p \vee (\sim q \vee r)$	1: ASSOC
7.	$\sim q \vee r$	5, 6: SD
8.	$q \rightarrow r$	7: COND

$$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p, q \vdash r$$

$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow p, q \vdash r$

1.	$p \rightarrow \sim q$	P_1
2.	$\sim r \rightarrow p$	P_2
3.	q	P_3
4.	$\sim p \vee \sim q$	1: COND
5.	$\sim p$	3, 4: SD
6.	$\sim\sim r \vee p$	2: COND
7.	$r \vee p$	6: DN
8.	r	5, 7: SD

$$p \vee (q \wedge r), \quad p \rightarrow s, \quad s \rightarrow r \vdash r$$

$p \vee (q \wedge r), \quad p \rightarrow s, \quad s \rightarrow r \vdash r$

1.	$p \vee (q \wedge r)$	P_1
2.	$p \rightarrow s$	P_2
3.	$s \rightarrow r$	P_3
4.	$p \rightarrow r$	2, 3: SH
5.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1: DIST
6.	$p \vee r$	5: SIMP
7.	$r \vee p$	6: COM
8.	$\sim\sim r \vee p$	7: DN
9.	$\sim r \rightarrow p$	8: COND
10.	$\sim r \rightarrow r$	4, 9: SH
11.	$\sim\sim r \vee r$	10: COND
12.	$r \vee r$	11: DN
13.	r	12: ID

$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad q \vee s \rightarrow \sim t, \quad t \vdash \sim p \wedge \sim r$

$p \rightarrow q, \quad r \rightarrow s, \quad q \vee s \rightarrow \sim t, \quad t \vdash \sim p \wedge \sim r$

1.	$p \rightarrow q$	P_1
2.	$r \rightarrow s$	P_2
3.	$q \vee s \rightarrow \sim t$	P_3
4.	t	P_4
5.	$\sim\sim t$	4: DN
6.	$\sim(q \vee s)$	3, 5: MT
7.	$\sim q \wedge \sim s$	6: DM
8.	$\sim q$	7: SIMP
9.	$\sim s$	1, 8: MT
10.	$\sim p$	2, 9: MT
11.	$\sim r$	10, 11: CONJ

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad r \rightarrow p, \quad p \rightarrow \sim r \quad \vdash \quad \sim p \wedge \sim r$$

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad r \rightarrow p, \quad p \rightarrow \sim r \quad \vdash \quad \sim p \wedge \sim r$$

1.	$p \rightarrow q$	P_1
2.	$q \rightarrow r$	P_2
3.	$r \rightarrow p$	P_3
4.	$p \rightarrow \sim r$	P_4
5.	$p \rightarrow r$	1, 2: SH
6.	$(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow r)$	3, 5: AD
7.	$(\sim r \vee p) \wedge (\sim p \vee r)$	6: COND
8.	$(\sim r \wedge \sim p) \vee (p \wedge r)$	7: ASSOC
9.	$\sim p \vee \sim r$	4: COND
10.	$\sim(p \wedge r)$	9: DM
11.	$\sim r \wedge \sim p$	8, 10: MT
12.	$\sim p \wedge \sim r$	11: COM

Exercícios

Tautologia é o mesmo que dizer que a sentença/argumento é válida

Contradição é o mesmo que dizer que a sentença é um absurdo

Fórmula factível é o mesmo que dizer que a sentença é uma contingência

Determinar quais das fórmulas abaixo são tautologias, contradições ou fórmulas factíveis.
Justifique sua resposta:

a) $(P \rightarrow (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$

b) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow Q$

c) $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \vee (P \rightarrow Q)$

d) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q \rightarrow \neg Q$