

Circuito Lógico

Curso ILC

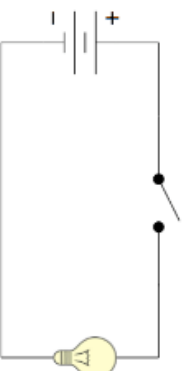
Circuito Lógico

Uma chave pode estar em uma de duas possíveis posições:



- Chave fechada: corrente pode passar.
- Chave aberta: há interrupção de corrente.

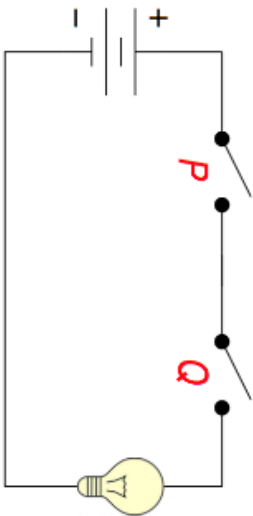
Exemplo de uma chave num circuito:



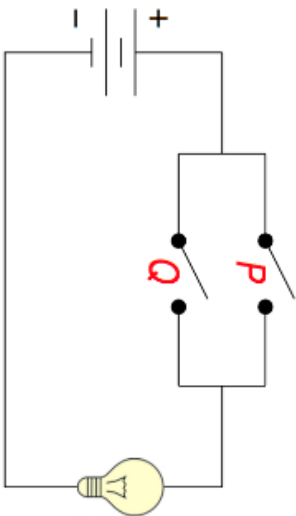
- Lâmpada acende se corrente passa por ela.
- Isto acontece, se a chave está fechada.

Circuito Lógico: aplicação

Sejam os circuitos abaixo e os possíveis comportamentos:



Chaves		Lâmpada
		Estado
P	Q	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Apagada
Aberta	Fechada	Apagada
Aberta	Aberta	Apagada



Chaves		Lâmpada
		Estado
P	Q	
Fechada	Fechada	Acesa
Fechada	Aberta	Acesa
Aberta	Fechada	Acesa
Aberta	Aberta	Apagada

- $P \wedge Q$ (conjunção);
- $P \vee Q$ (disjunção).

No projeto de circuitos digitais, os valores lógicos **verdadeiro** e **falso** são normalmente substituídos pelos símbolos 1 e 0.

→ Estes símbolos são chamados de *bits* (binary digits).

Circuito Lógico: Aplicação

Axiomas da álgebra de Boole

1. As variáveis booleanas só podem assumir os valores 0 ou 1, ou seja:

$$x=0 \text{ ou } x=1$$

2. O complemento ou negação de uma variável x , simbolizado por $\bar{x}$ é obtida tal que:

$$\text{Se: } x = 0, \text{ então: } \bar{x} = 1$$

$$\text{Se: } x = 1, \text{ então: } \bar{x} = 0$$

3. A operação AND representada pelo símbolo: $\cdot$, ou $\wedge$, corresponde à multiplicação lógica sendo definida pelas equações:

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$

Axiomas da álgebra de Boole

4. A operação OR representada pelo símbolo $+$, ou $\vee$, corresponde à soma lógica sendo definida pelas equações:

$$0 + 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1$$

$$0 + 1 = 0 \qquad 1 + 1 = 1$$

5. A operação XOR representada pelo símbolo $\oplus$, corresponde à multiplicação lógica sendo definida pelas equações:

$$0 \oplus 0 = 0 \qquad 1 \oplus 0 = 1$$

$$0 \oplus 1 = 1 \qquad 1 \oplus 1 = 0$$

Portas lógicas

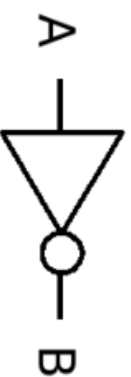
- **Portas Lógicas:** são elementos de circuitos lógicos básicos que realizam as Operações Booleanas básicas:

✓ Inversão (Negação), AND, OR, e XOR.

As portas lógicas básicas são as seguintes:

Porta Inversora ou NOT

Realiza a operação de complemento ou negação, sendo o símbolo e a tabela verdade como mostrado a seguir:



A	B
1	0
0	1

Portas lógicas

Porta AND

Realiza a operação AND (multiplicação lógica) entre duas ou mais variáveis binárias.

O símbolo da porta AND de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	$C = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta OR

Realiza a operação OR (soma lógica) entre duas ou mais variáveis binárias.

O símbolo da porta OR de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	$C = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Portas lógicas

Porta XOR

Realiza a operação XOR (soma exclusiva) entre duas ou mais variáveis binárias.

O símbolo da porta XOR de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	$C=A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Porta NAND

Realiza a operação NAND (negação da multiplicação lógica) entre duas ou mais variáveis binárias.

O símbolo da porta NAND de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Portas Lógicas

NOR

Realiza a operação NOR (negação da soma lógica) entre duas ou mais variáveis binárias.

O símbolo da porta NOR de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

XNOR

Realiza a operação XNOR (negação da soma exclusiva) entre duas ou mais variáveis binárias.

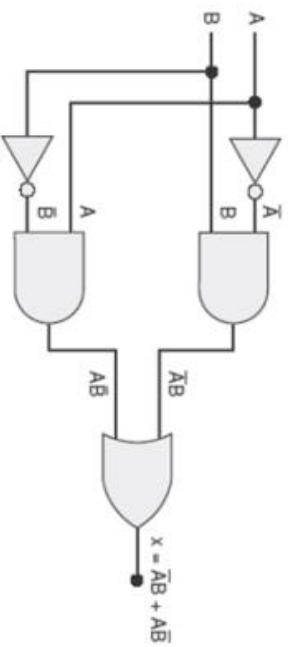
O símbolo da porta XNOR de 2 entradas e a sua tabela verdade são mostrados a seguir:



A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

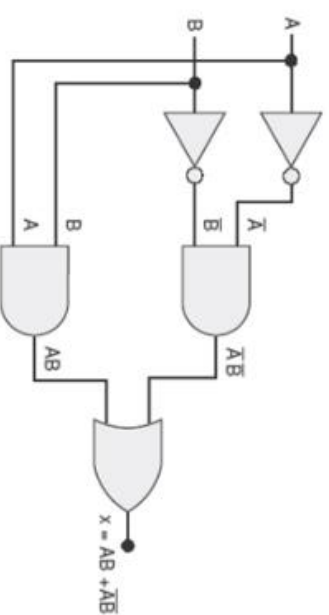
Portas lógicas

XOR com portas NOT/AND/OR



A	B	x
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

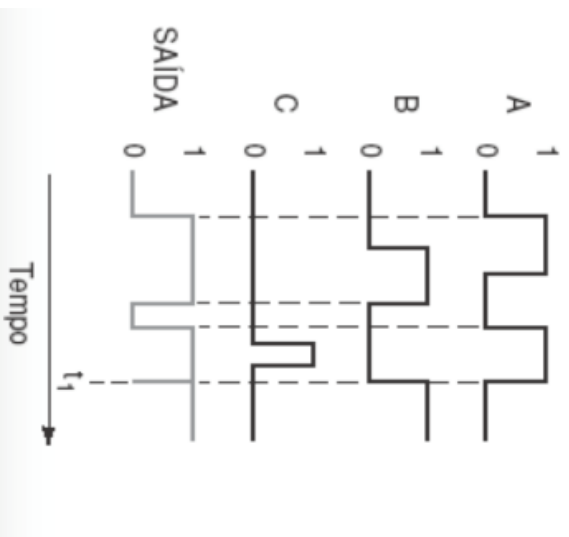
XNOR com portas NOT/AND/OR



A	B	x
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

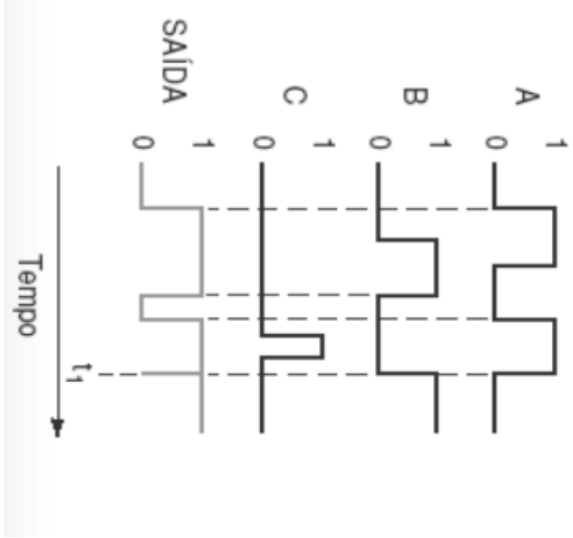
Exercicio

Observe o comportamento abaixo e desenhe o circuito

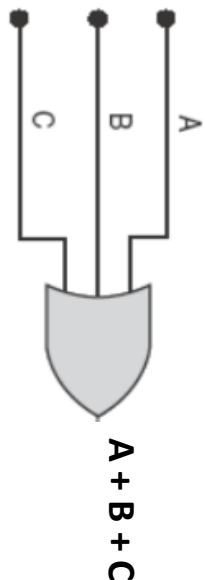


Exercicio

Observe o comportamento abaixo e desenhe o circuito



A	B	C	$x = A + B + C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Como exemplo: o circuito abaixo pode ser expresso pela expressão booleana: $x = \overline{A} \cdot B + C$

Qualquer circuito lógico, por mais complexo que seja, pode ser completamente descrito através das operações booleanas OR, AND, e NOT.

Circuitos Lógicos

Como exemplo: o circuito abaixo pode ser expresso pela expressão booleana: $x = \bar{A}.B + C$



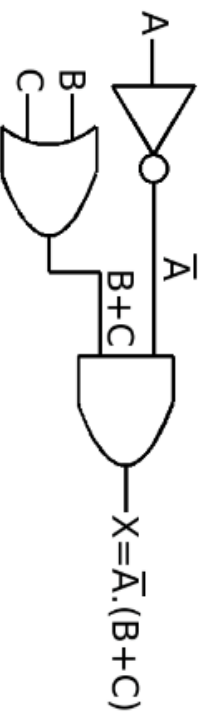
Qualquer circuito lógico, por mais complexo que seja, pode ser completamente descrito através das operações booleanas OR, AND, e NOT.

Circuitos Lógicos

Já a expressão booleana: $\bar{A} \cdot (B + C)$ descreve o circuito:

Circuitos Lógicos

Já a expressão booleana: $\bar{A} \cdot (B + C)$ descreve o circuito:



Observe que as expressões: $\bar{A} \cdot B + C$ e $\bar{A} \cdot (B + C)$, diferem apenas na presença dos parênteses, o que deixa claro que a operação AND precede as demais operações, exceto se a precedência for quebrada pelos parênteses.

Circuitos Lógicos

$$A) X = \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot (\overline{A + D})$$

$$B) X = [D + (\overline{A + B}) \cdot C] \cdot E$$

Exercícios: mostre os circuitos resultantes

Avaliação das expressões booleanas

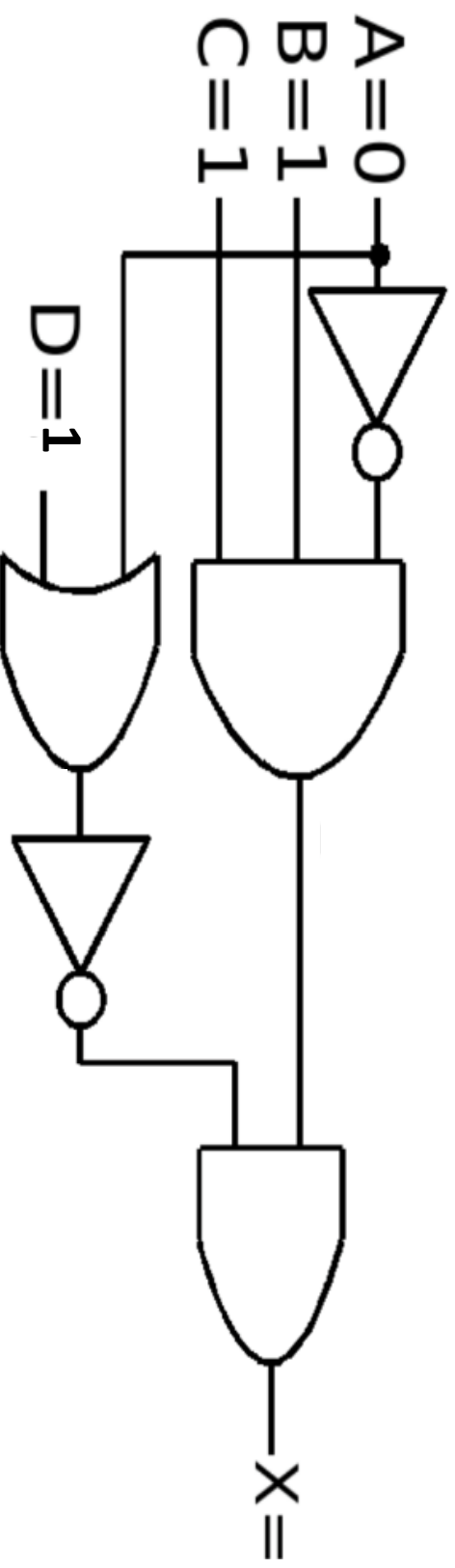
a) Na expressão: $X = \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot (\bar{A} + D)$, substituindo-se as variáveis A, B, C, e D, por 0, 1, 1, e 1, respectivamente, obtém-se:

$$X = \bar{0} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\bar{0} + 1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\bar{0} + 1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

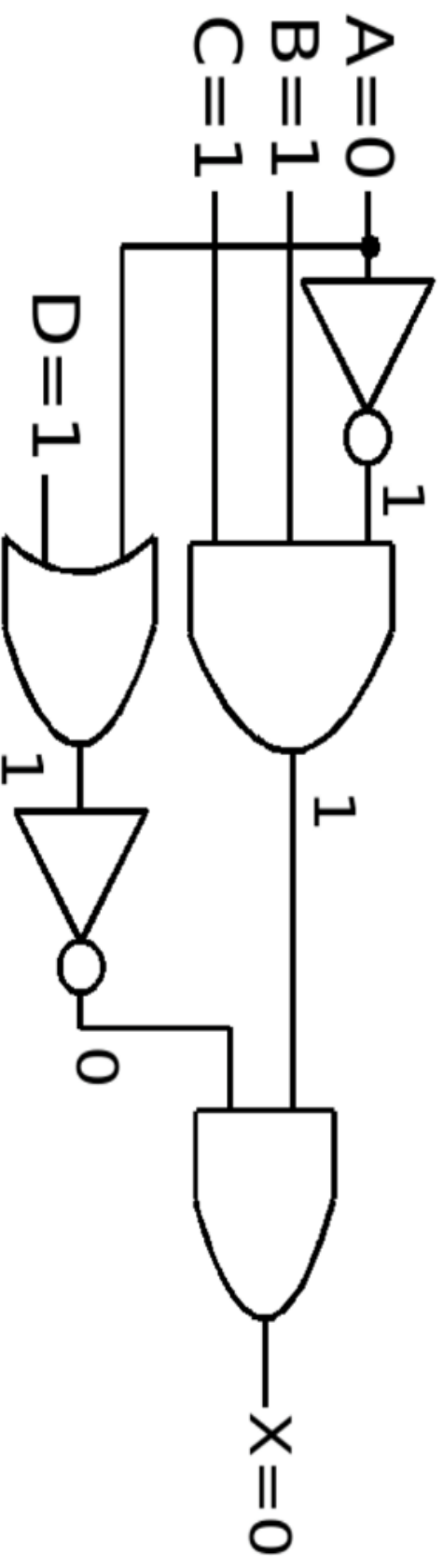
b) Na expressão: $X = [D + (\bar{A} + B) \cdot C] \cdot E$, substituindo-se as variáveis A, B, C, D, e E, por 0, 0, 1, 1, e 1, respectivamente, obtém-se:

$$X = [1 + (\bar{0} + 0) \cdot 1] \cdot 1 = [1 + (\bar{0} \cdot 1)] \cdot 1 = [1 + 1] \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Avaliação da saída do circuito lógico



Avaliação da saída do circuito lógico

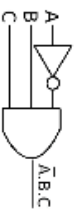


Pode-se implementar (sintetizar) um circuito lógico através da expressão booleana associada a este.

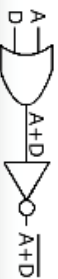
Por exemplo a expressão: $X = \bar{A} . B . C . (\bar{A} + \bar{D})$, pode se implementada partindo-se das partes que a compõem: $Y = \bar{A} . B . C$ e $Z = (A + D)$.

Sintetizando-as e por fim associando as duas através da operação booleana AND, pois: $X = Y . Z$

O circuito lógico da expressão booleana: $Y = \bar{A} . B . C$, é o seguinte:

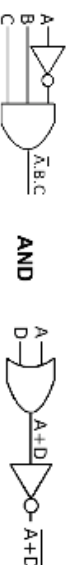


O circuito lógico da expressão booleana: $Z = (\bar{A} + \bar{D})$, é o seguinte:

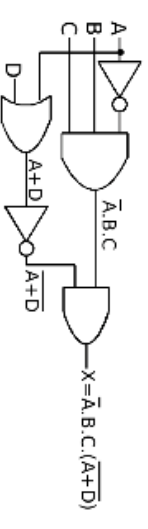


Por fim, as saídas dos dois blocos de circuito anteriores são entradas de uma porta AND, e a expressão booleana:

$$X = Y . Z = [A . B . C] . (A + D)$$



Que resulta no circuito mostrado abaixo:



Implementando o circuito

1. Identidade:

$$A + 0 = A \quad \text{e} \quad A \cdot 1 = A \quad (\text{dual})$$

2. Elemento Nulo:

$$A + 1 = 1 \quad \text{e} \quad A \cdot 0 = 0 \quad (\text{dual})$$

3. Idempotência:

$$A + A = A \quad \text{e} \quad A \cdot A = A \quad (\text{dual})$$

4. Complemento:

$$A + \bar{A} = 1 \quad \text{e} \quad A \cdot \bar{A} = 0 \quad (\text{dual})$$

5. Involução:

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

6. Comutativa:

$$A + B = B + A$$

7. Associativa:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

8. Distributiva:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot (A + C) = A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C \quad (\text{dual})$$

Teoremas da álgebra booleana

9. Cobertura:

$$A + A.B = A$$

^e

$$A.(A + B) = A$$

10. Combinação:

$$A.B + A.\bar{B} = A$$

^e

$$(A + B).(A + \bar{B}) = A \quad (\text{dual})$$

$$A + \bar{A}.B = A + B$$

$$\bar{A} + A.B = \bar{A} + B$$

11. Consenso (Termo Fantasma):

$$A.B + \bar{A}.C + B.C = A.B + \bar{A}.C$$

^e

$$(A + B).(\bar{A} + C).(B + C) = (A + B).(\bar{A} + C) \quad (\text{dual})$$

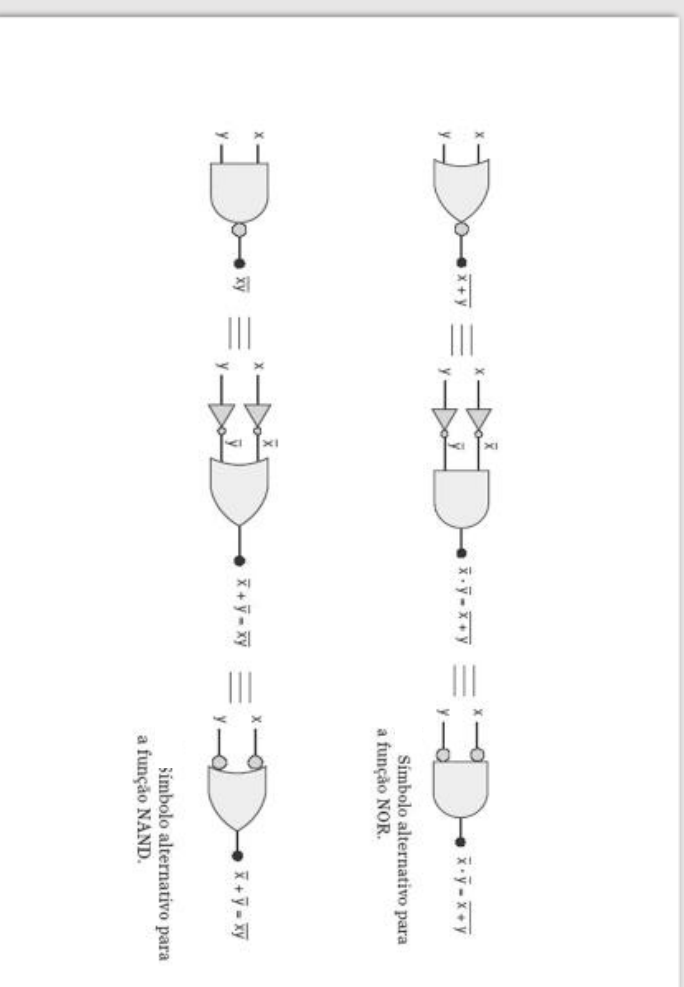
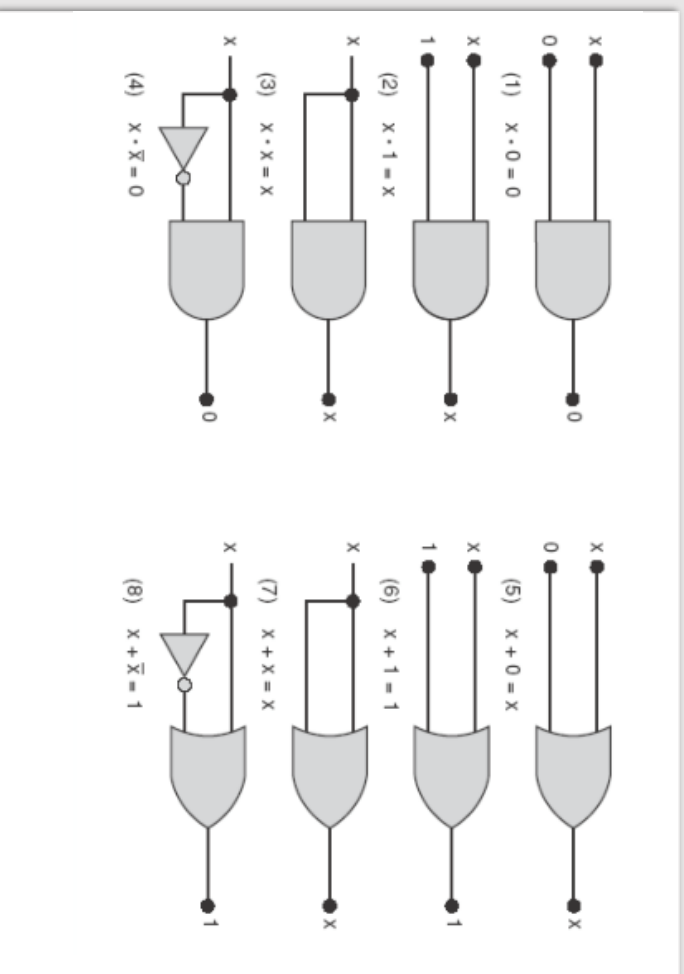
12. De Morgan:

$$\overline{(A.B)} = \bar{A} + \bar{B}$$

^e

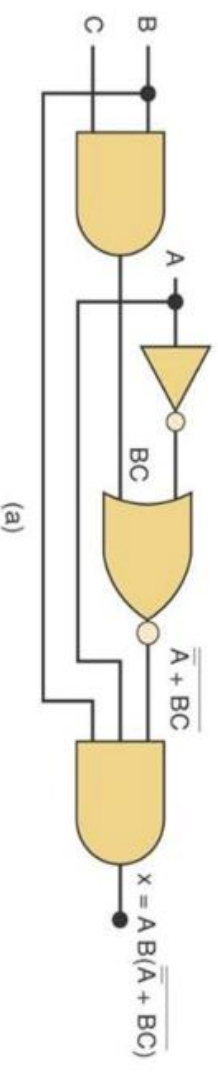
$$\overline{(A + B)} = \bar{A}.\bar{B} \quad (\text{dual})$$

Teoremas da álgebra booleana

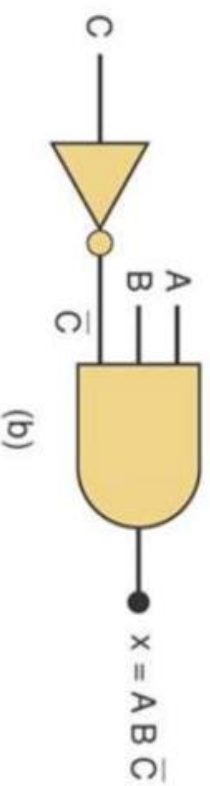


Teoremas da álgebra booleana

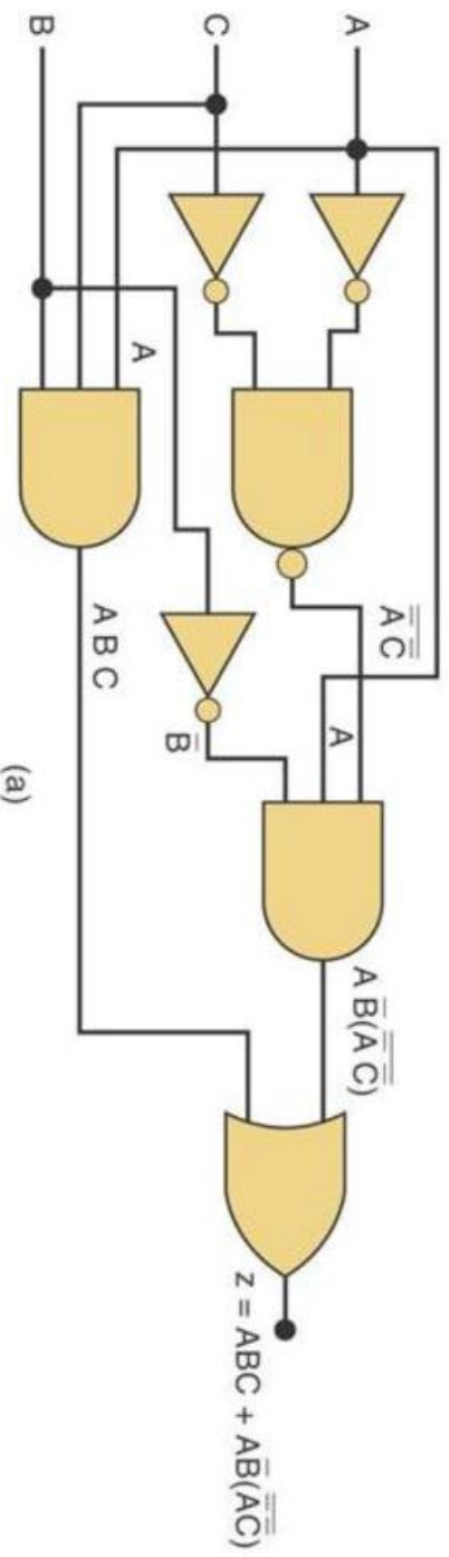
Simplificação algébrica de circuitos lógicos



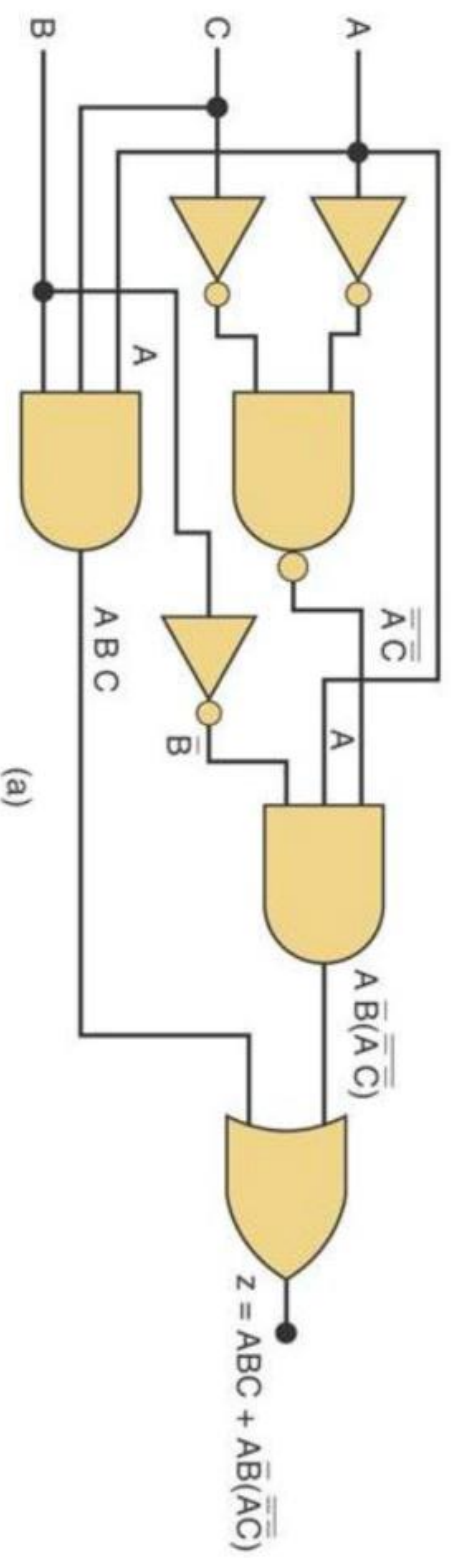
$$\begin{aligned} X &= A \cdot B \cdot (\bar{A} + BC) = A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot B \cdot A \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \\ &= A \cdot B \cdot A \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot A \cdot \bar{C} = A \cdot B \cdot \bar{B} + A \cdot B \cdot \bar{C} = 0 + A \cdot B \cdot \bar{C} \\ &= A \cdot B \cdot \bar{C} \end{aligned}$$



Simplificação algébrica de circuitos lógicos

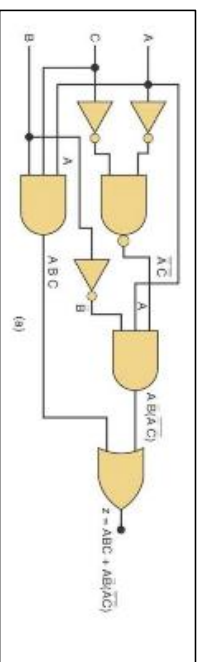


Simplificação algébrica de circuitos lógicos



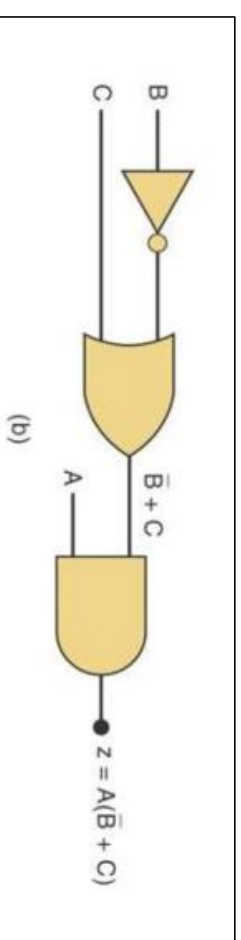
$$\begin{aligned} Z &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{C}) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \\ &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (A + C) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot A + A \cdot \bar{B} \cdot C \\ &= A \cdot C \cdot (B + \bar{B}) + A \cdot \bar{B} = A \cdot C \cdot 1 + A \cdot \bar{B} = A \cdot (\bar{B} + C) \end{aligned}$$

Simplificação algébrica de circuitos lógicos



$$\begin{aligned}
 Z &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{C}) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \\
 &= A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot (A + C) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{B} \cdot C \\
 &= A \cdot C \cdot (B + \bar{B}) + A \cdot \bar{B} = A \cdot C \cdot 1 + A \cdot \bar{B} = A \cdot (\bar{B} + C)
 \end{aligned}$$

(b)



Mapa de Karnaugh

- Método gráfico usado para simplificar uma equação lógica ou converter uma tabela verdade no seu circuito lógico correspondente
- Sair do circuito idealizado para o circuito otimizado que você vai realmente construir
- A partir da tabela verdade que determina o comportamento, chega-se ao circuito a ser construído que reproduz tabela verdade

Considerações importantes

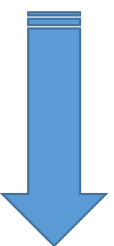
- Na construção da tabela, manter a distancia de Hamming de 1, isto é, mudar apenas 1 bit em cada passo (onde as pessoas erram mais;)
- Aprendendo por exemplos

EXEMPLO: Tabela Verdade

A	B	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

DA TABELA VERDADE PARA MAPA DE KARNAUGH

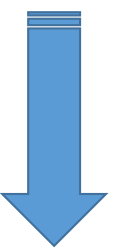
A	B	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



A\B	0	1
0	1	
1		1

DA TABELA VERDADE PARA MAPA DE KARNAUGH

A	B	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

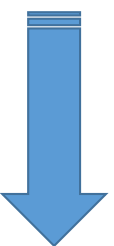


A\B	0	1
0	1	
1		1

$$Y = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

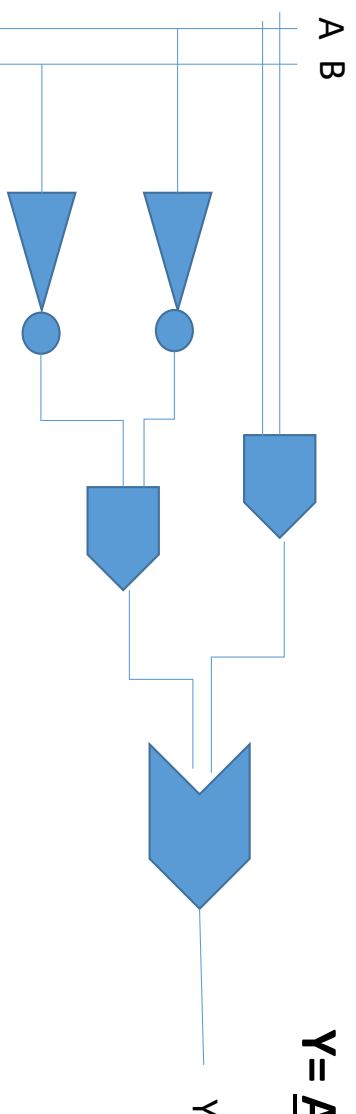
DA TABELA VERDADE PARA MAPA DE KARNAUGH

A	B	Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



A\B	0	1
0	1	
1		1

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + A.B$$



Exemplo: Considere a tabela verdade abaixo

A	B	C	SAIDA
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemplo: Construa o mapa de Karnaugh

A	B	C	SAIDA
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	"00"	"01"	"11"	"10"
"0"	1	1	1	
"1"			1	1

Exemplo: Grupos de 2^n

A	B	C	SAIDA
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	"00"	"01"	"11"	"10"
"0"	1	1	1	
"1"			1	1

Exemplo: quem muda não entra no circuito

A	B	C	SAIDA
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	"00"	"01"	"11"	"10"
"0"	1	1	1	
"1"			1	1

A QUER DIZER "NOT A"

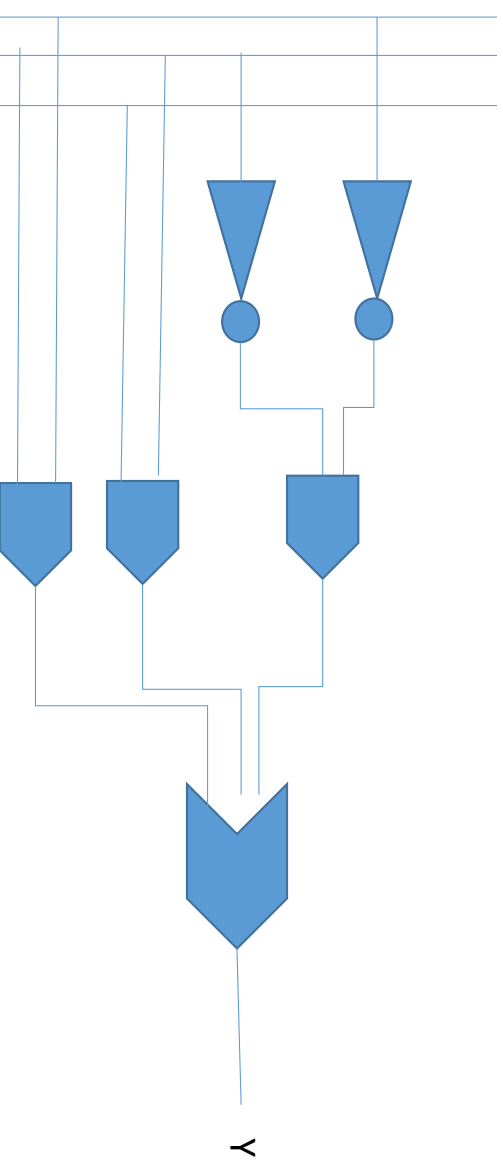
Circuito = A . B + B . C + A . B

Exemplo: quem muda não entra no circuito

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

A \ BC	"00"	"01"	"11"	"10"
"0"	1	1	1	
"1"			1	1

A B C $Y = \bar{A} \cdot \bar{B} + B \cdot C + A \cdot B$



EXEMPLO #2: DADA A TABELA VERDADE

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

EXEMPLO #2: DADA A TABELA VERDADE

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

AB\CD	"00"	"01"	"11"	"10"
"00"	1	1		1
"01"	1	1		1
"11"			1	
"10"	1			1

EXEMPLO #2: DADA A TABELA VERDADE

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

AB\CD	"00"	"01"	"11"	"10"
"00"	1	1		1
"01"	1	1		1
"11"			1	
"10"	1			1

$$Y = \underline{A}.\underline{C} + \underline{A}.\underline{D} + A.B.\underline{D} + A.B.C.D$$

EXERCICIO em sala

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

EXERCICIO → mapa de karnaugh

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A\BC	"00"	"01"	"11"	"10"
0	1	1		1
1				1

EXERCICIO → mapa de karnaugh

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A\BC	"00"	"01"	"11"	"10"
0	1	1		1
1				1

$$Y = \bar{A}.\bar{B} + \bar{A}.\bar{C} + B.\bar{C}$$

EXERCICIO em sala

- Use o mapa de Karnaugh para simplificar

$$Y = \overline{C}(\overline{A}\overline{B}\overline{D} + D) + A\overline{B}C + \overline{D}.$$

EXERCICIO em sala

- Use o mapa de Karnaugh para simplificar

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	1
$\bar{A}B$	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\bar{B}$	1	1	1	1

$$Y = \bar{C}(\bar{A}\bar{B}\bar{D} + D) + A\bar{B}C + \bar{D}.$$

EXERCICIO em sala

- Use o mapa de Karnaugh para simplificar

$$y = \overline{C}(\overline{A}\overline{B}\overline{D} + D) + A\overline{B}C + \overline{D}.$$

	$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
$\overline{A}\overline{B}$	1	1	0	1
$\overline{A}B$	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
$A\overline{B}$	1	1	1	1



AB\CD	"00"	"01"	"11"	"10"
"00"	1	1	0	1
"01"	1	1	0	1
"11"	1	1	0	1
"10"	1	1	1	1

EXERCICIO em sala

- Use o mapa de Karnaugh para simplificar

$$Y = \overline{C}(\overline{A}\overline{B}\overline{D} + D) + A\overline{B}C + \overline{D}.$$

AB\CD	"00"	"01"	"11"	"10"
"00"	1	1	0	1
"01"	1	1	0	1
"11"	1	1	0	1
"10"	1	1	1	1

EXERCÍCIO em sala

- Use o mapa de Karnaugh para simplificar

$$Y = \overline{C}(\overline{A}\overline{B}\overline{D} + D) + A\overline{B}C + \overline{D}.$$

AB\CD	"00"	"01"	"11"	"10"
"00"	1	1	0	1
"01"	1	1	0	1
"11"	1	1	0	1
"10"	1	1	1	1

$$Y = \overline{C} + A.\overline{B} + \overline{D}$$

Exercícios para casa

- Determine a expressão mínima para os mapas abaixo:

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	1	1
$\bar{A}B$	1	1	0	0
AB	0	0	0	1
$A\bar{B}$	0	0	1	1

(a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	0	1	1
$\bar{A}B$	1	0	0	1
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	0	1	1

(b)

	$\bar{C}$	C
$\bar{A}\bar{B}$	1	1
$\bar{A}B$	0	0
AB	1	0
$A\bar{B}$	1	X

(c)

Exercícios para casa

- Simplifique as expressões usando o mapa de Karnaugh

$$y = \overline{(C + \overline{D})} + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{C}\overline{D}$$
$$x = \overline{AB(CD)} + \overline{A}BD + \overline{B}\overline{C}\overline{D}$$