Introdução à Lógica Computacional

Aula: Tableau Analítico

Prova por refutação

- Nega-se a consequência lógica e chega-se em um absurdo

Tableaux Analíticos

- Sistema de inferência
  - sem gerar uma prova de tamanho exponencial no número de variáveis, como acontece com a tabela-verdade
- Uma árvore é um modelo bastante usado na computação para estruturas hierárquicas
- Ideia do Tableau
  - representar em forma de árvore

Tableaux Analíticos

- Baseado em árvores
  - Ramos são decomposições das fórmulas em subfórmulas
  - ou seja, possibilidades de <u>interpretações</u> da fórmula
  - Cada ramo representa uma ou mais interpretações
- Adequado para implementação!

Tableaux Analítico como método de prova por refutação

- Processo de refutação
  - Para provar {B1, B2, . . . , Bn} |-- A1, A2, . . . , Am
    - Será afirmada a veracidade do antecedente, B1, B2, . . . , Bn
    - Falsidade do consequente, A1, A2, . . . , Am
  - Geração de uma contradição
  - Se a contradição não é obtida,
    Então deve-se encontrar um contra-exemplo ao sequente, uma valoração que satisfaça todas as fórmulas Bi do antecedente e falsifica todas das fórmulas Aj do consequente.
  - Notação:
    - Trabalharemos com fórmulas marcadas pelos símbolos T (True-Verdadeiro) e F (Falso).
      Ao invés de fórmulas como A, usaremos fórmulas da forma T A ou F A

Tableau: ramos abertos e fechados

- Ramo fechado:
  - Um ramo é dito fechado se sua sequencia leva a uma interpretação absurda
- Ramo aberto:
  - Um ramo é dito aberto quando sua interpretação é possível

Exemplo

- Construa o Tableau semântico para o conjunto de fórmulas {(AvB),(A^ ¬B)}

1. AvB

2.A^ ¬B

3. A	B	R1
4. A	A	R2
5. ¬B	¬B	R2

Duas ramificações abertas da árvore

Notação do Tableau

- p, p∧q → r |-- r
- marcamos
  - as formas do antecedente (p, p∧q → r) com True e
  - as fórmulas do consequente (r) com False
- Iniciamos a nossa árvore com essas fórmulas, escolhemos uma fórmula para ser a raiz e adicionamos as outras fórmulas numa sequência hierárquica formando um único ramo

$$Tp$$

$$|$$

$$Tp \wedge q \rightarrow r$$

$$|$$

$$Fr$$

Regra β

- Se temos True A → B
- Então devemos analisar as possibilidades que fazem A → B ser verdadeira.
  - A é falsa ou
  - B é verdadeira
  - Como há duas possibilidades, esta será uma regra β.
  - Regras beta bifurcam a árvore pois representam que uma mesma valoração pode ser obtida de formas diferentes.
- A regra pode ser resumida pela figura

Lembrando o comportamento da implicação

$I(A \to B)$	$I(B)=0$	$I(B)=1$
$I(A)=0$	1	1
$I(A)=1$	0	1

Regra alfa

- A regra pode ser resumida como abaixo. Se existe uma fórmula F A → B em um ramo da árvore, crie dois novos vértices T A e F B, um sendo filho do outro, para cada um dos ramos que contém F A → B.

$$
\begin{array}{c}
FA \to B \\
| \\
TA \\
| \\
FB
\end{array}
$$

Regras para uso do método do Tableau

$R_1 = A \land B$

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

$R_2 = A \lor B$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A & B \end{array}$$

$R_3 = A \rightarrow B$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & B \end{array}$$

$R_4 = A \leftrightarrow B$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A \land B & \neg A \land \neg B \end{array}$$

$R_5 = \neg\neg A$

$$A$$

$R_6 = \neg(A \land B)$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

$R_7 = \neg(A \lor B)$

$$\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}$$

$R_8 = \neg(A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}$$

$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A \land B & A \land \neg B \end{array}$$

Exemplo de Prova usando Tableaux

- Prove a validade da sentença :
  $H=\neg((P\rightarrow Q)\wedge(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg\neg P))$
- Note que não há premissas. Logo, a prova por refutação será mostrar que $\neg H$. é um absurdo, isto é, que todos os ramos são fechados

Exemplo de Prova usando Tableaux

- Prove a validade da sentença :
  $H = \neg((P \rightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg\neg P))$
- Gerar um tableau fechado para $\neg H$:
  $\neg(\neg((P \rightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg\neg P)))$

- 1. $\neg(\neg((P\rightarrow Q)\wedge(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg\neg P)))$ *negação da sentença H*
- 2. $(P\rightarrow Q)\wedge(P\leftrightarrow Q)\wedge(\neg\neg P)$ R5, 1.
- 3. $P\rightarrow Q$ R1, 2.
- 4. $P\leftrightarrow Q$ R1, 2.
- 5. $\neg\neg P$ R1, 2.
- 6. P R5, 5.
- 7. $\neg P$ Q R3, 3.

fechado

- 8. $\neg P\wedge\neg Q$ $P\wedge Q$ R9, 4.
- 9. $\neg P$ P R1, 8.
- 10. $\neg Q$ Q R1, 8.

fechado aberto

Não consigo provar a validade
Note que se P e Q são verdadeiros→
a sentença H é falsa

Exemplo: Prove a validade da sentença $H = ((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$

- 1. $\neg(P \leftrightarrow Q) \vee \neg\neg P)$ *negando a sentença H*
- 2. $\neg(P \leftrightarrow Q)$
- 3. $\neg\neg P$
- 4. P
- 5. $P \wedge \neg Q$ $\quad\quad$ $\neg P \wedge Q$
- 6. P $\quad\quad$ $\neg P$
- 7. $\neg Q$ $\quad\quad$ Q

aberto $\quad\quad$ fechado

Conseqüência Lógica em Tableaux

- Dada uma fórmula H e
- um conjunto de hipóteses β={H1,H2,...Hn},
- então H é conseqüência lógica em tableaux semânticos de β
- se existe uma prova, usando tableaux de
  - (H1^H2^...^Hn) $\rightarrow$ H

Notação de Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

- Dada uma fórmula H, se H é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses β={H1,H2,...Hn} em tableaux semânticos, diz-se que:
  - $\beta \vdash$ H ou
  - {H1,H2,...Hn} $\vdash$ H

Exemplo de Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

- Lewis Hamilton é determinado
- Lewis Hamilton é inteligente
- Se Lewis Hamilton é determinado, ele não é um perdedor
- Lewis Hamilton é um atleta se participa de corridas de carro regularmente
- Lewis Hamilton participa de corridas de carro regularmente se é inteligente

“Lewis Hamilton não é um perdedor” é consequência lógica das afirmações acima?

Exemplo de Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

D

- Lewis Hamilton é determinado
- Lewis Hamilton é inteligente I
- Se Lewis Hamilton é determinado, ele não é um perdedor P
- Lewis Hamilton é um atleta A se participa de corridas C de carro regularmente
- Lewis Hamilton participa de corridas de carro regularmente se é inteligente

"Lewis Hamilton não é um perdedor" é consequência lógica das afirmações acima?

Exemplo de Conseqüência Lógica em Tableaux Semânticos

- Lewis Hamilton é <u>determinado</u>
- Lewis Hamilton é <u>inteligente</u>
- Se Lewis Hamilton é determinado, ele não é um <u>perdedor</u>
- Lewis Hamilton é um <u>atleta</u> se participa de <u>corridas</u> de carro regularmente
- Lewis Hamilton participa de corridas de carro regularmente se é inteligente

"Lewis Hamilton não é um perdedor" é consequência lógica das afirmações acima?

1- D

2- I

3- $D \rightarrow \sim P$

4- $C \rightarrow A$

5- $I \rightarrow C$

6- $\sim P$

1- D

2- I

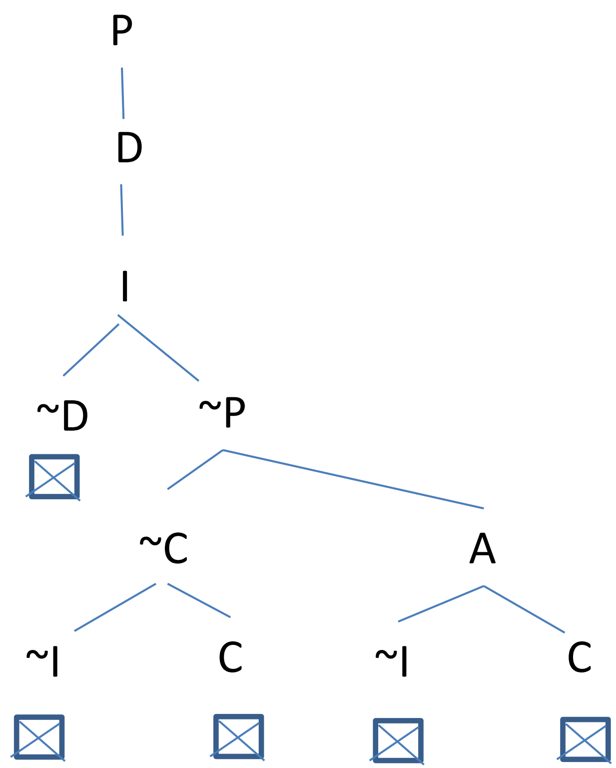
3- D→~P

4- C → A

5- I→C

6- ~ P

Nego a conclusão



Todos os ramos fechados

Exercícios de Formalização

- A proposta de auxílio já está no correio. Se os árbitros a receberem até sexta-feira, eles a analisarão. Portanto, eles a analisarão porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta-feira. (C, S, A)

Solução

Note que isso é premissa também

- A proposta de auxílio está no correio. Se os árbitros a receberem até sexta-feira, eles a analisarão. Portanto, eles a analisarão porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta-feira.

C: A proposta de auxílio está no correio.

S: Os árbitros recebem a proposta até Sexta-feira.

A: Os árbitros analisarão a proposta.

$$\{C, S \rightarrow A, C \rightarrow S\} \mid\!-\!- A$$

Exercício

- Hoje é Sábado ou Domingo. Se hoje é Sábado então é um fim de semana. Se hoje é Domingo então é um fim de semana. Portanto, hoje é um fim de semana.

Exercício

- Hoje é Sábado ou Domingo. Se hoje é Sábado então é um fim de semana. Se hoje é Domingo então é um fim de semana. Portanto, hoje é um fim de semana.
- $\{S \vee D, S \rightarrow F, D \rightarrow F\} \vdash F$

$R_1 = A \wedge B$

A

B

$R_2 = A \vee B$

$A \qquad B$

$R_3 = A \rightarrow B$

$\neg A \qquad B$

$R_4 = A \leftrightarrow B$

$A \wedge B \qquad \neg A \wedge \neg B$

$R_5 = \neg\neg A$

A

$R_6 = \neg(A \wedge B)$

$\neg A \qquad \neg B$

$R_7 = \neg(A \vee B)$

$\neg A$

$\neg B$

$R_8 = \neg(A \rightarrow B)$

A

$\neg B$

$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$

$\neg A \wedge B \qquad A \wedge \neg B$