

# Introdução à Lógica Computacional ILC 2019.2

Aula: Lógica de Predicados II

Mestrando: Daniel da Silva Costa

Professora: Dra. Ana Cristina Bicharra Garcia

UNIRIO



*Recordar é viver...*

# Sintaxe

- **Conectivos Lógicos:**  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$
- **Objetos:** concretos, abstratos, fictícios
- **Termos:**  $t_1, t_2, \dots, t_n$ 
  - **Variáveis:**  $x, y, z$  (“alguém”, “algo”, “algum”)
  - **Constantes:**  $a, b, c$  (“João”, “Turma ILC”, “o ponto A”)
- **Predicados:**  $P, P(x), Q(x), R(x, z), T(x, y, z)$ 
  - Propriedades ou relações entre os objetos do universo
- **Quantificadores:**  $\forall$  (Universal),  $\exists$  (Existencial)

# Quantificadores

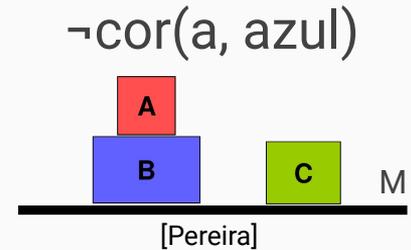
Para  $D = \{a, b, c\}$

Quantificador **Universal**  $\Leftrightarrow$  **Conjunção**

$$\forall (x)[ \text{colorido}(x) ] \Leftrightarrow \text{colorido}(a) \wedge \text{colorido}(b) \wedge \text{colorido}(c)$$

Quantificador **Existencial**  $\Leftrightarrow$  **Disjunção**

$$\exists (x)[ \text{colorido}(x) ] \Leftrightarrow \text{colorido}(a) \vee \text{colorido}(b) \vee \text{colorido}(c)$$



# Fórmulas

- Definição de Fórmula: [PUCSP]
  - Se **A** e **B** forem **fórmulas** então:  $(\neg A)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  e  $(A \Leftrightarrow B)$  são fórmulas.
  - Se **A** for uma fórmula e **x** uma variável então  $(\forall x)A$  e  $(\exists x)A$  são fórmulas.

# Fórmulas Atômicas

- Toda fórmula **atômica** é uma fórmula.
- $P(x)$ ,  $Q(y)$ ,  $R(x, z)$ ,  $T(x, y, z)$
- **Sem quantificadores**, apenas o predicado.
- Exemplo:  $T(x, y, z)$ 
  - “Pessoa **X** emprestou para pessoa **Y** um livro **Z**”.
  - “**João** emprestou para **Maria** o livro **O Senhor dos Anéis**”.

# Quantificadores - Exemplos

1. Pedras preciosas são caras.
2. Ninguém gosta de impostos.
3. Vegetarianos não gostam de açougueiros.

# Quantificadores - Negação

[PUCSP]

Seja a fórmula  $(\forall x) P(x)$  e o conjunto universo  $U = \{ a, b, c \}$ .

$$(\forall x) P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$$

Podemos considerar então que :

$$\neg(\forall x) P(x) \Leftrightarrow \neg( P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) ) \Leftrightarrow \neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$$

# Quantificadores - Negação

Existe no mínimo um objeto em U tal que  $\neg P(x)$ .

Logo:

$$\neg(\forall x) P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg P(x)$$

Segue-se que:

$$(1) \quad \neg(\forall x) P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg P(x)$$

$$(2) \quad \neg(\forall x) \neg P(x) \Leftrightarrow (\exists x) P(x)$$

$$(3) \quad \neg(\exists x) P(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg P(x)$$

$$(4) \quad \neg(\exists x) \neg P(x) \Leftrightarrow (\forall x) P(x)$$

# Quantificadores - Equivalência

[Pereira]

Nem toda estrada é perigosa.

(=?)

Algumas estradas não são perigosas.

# Quantificadores - Equivalência

Nem todo bêbado é fumante.

(=?)

Alguns bêbados são fumantes.

# Quantificadores - Equivalência

Nem todo ator americano é famoso.

(=?)

Alguns atores americanos não são famosos.

Validade

# Exemplo 0 - [PUCSP]

Todos os humanos são racionais.

Alguns animais são humanos.

---

Portanto, alguns animais são racionais.

# “Novas ferramentas”

- Instanciação
- Funções de Skolem
- Unificação

Instanciação

(Variáveis Universais)

# Instanciação - Variável Universal

*“Todo cão é fiel a alguém”* [Pereira]

Fórmula:  $\forall x[ \text{cão}(x) \rightarrow \exists y[ \text{fiel}(x, y) ] ]$

Instância:  $\text{cão}(\text{Totó}) \rightarrow \exists y[ \text{fiel}(\text{Totó}, y) ] / \{ x = \text{Totó} \}$

*“Se Totó é um cão, então Totó é fiel a alguém.”*

Fórmula e instância têm **significados coerentes.**



# Instanciação - Variável Existencial

*“Todo cão é fiel a alguém”* [Pereira]

Fórmula:  $\forall x[ \text{cão}(x) \rightarrow \exists y[ \text{fiel}(x, y) ] ]$

Instância:  $\forall x[ \text{cão}(x) \rightarrow \text{fiel}(x, \mathbf{Daniel}) ] / \{ \mathbf{y = Daniel} \}$

*“Todo cão é fiel a Daniel.”*

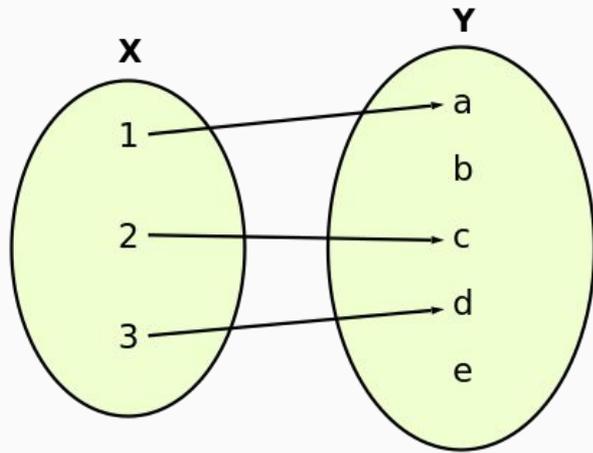
Fórmula e instância têm **significados diferentes**.

Funções de Skolem

(Variáveis Existenciais)

# Funções matemáticas

$$y = f(x) \Leftrightarrow \{ x \in A \text{ e } y \in B \}$$



Fonte:  
[https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o\\_\(matem%C3%A1tica\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica))

Fonte:  
[https://sc01.alicdn.com/kf/HTB19zvXn7OWBuNjSppq6xPgpXa1/Commercial-Espresso-Coffee-Machine-Instant-Coin-Coffee.jpg\\_350x350.jpg](https://sc01.alicdn.com/kf/HTB19zvXn7OWBuNjSppq6xPgpXa1/Commercial-Espresso-Coffee-Machine-Instant-Coin-Coffee.jpg_350x350.jpg)



# Funções de Skolem

*“Todo cão é fiel a alguém”* [Pereira]

Fórmula:  $\forall x[ \text{cão}(x) \rightarrow \exists y[ \text{fiel}(x, y) ] ]$

**{ y = dono(x) }**

Instância:  $\forall x[ \text{cão}(x) \rightarrow \text{fiel}(x, \text{dono}(x)) ]$

*“Todo cão é fiel a seu dono.”*

Fórmula e instância têm **significados coerentes.**



**Thoralf Skolem**

Fonte:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Thoralf\\_Skolem](https://en.wikipedia.org/wiki/Thoralf_Skolem)

Unificação

# Unificação

“Processo de encontrar um conjunto minimal de **substituições** que torna duas fórmulas idênticas.” [Pereira]

Nesse processo, uma **variável** pode ser substituída **por uma constante, por uma variável ou por uma função**. [Pereira]

- Exemplos:
  - $\text{gosta}(\text{Bia}, x)$  e  $\text{gosta}(y, z) \mid \{ \text{Bia}/y, x/z \}$
  - $\text{ama}(\text{Deus}, y)$  e  $\text{ama}(x, \text{filho}(x)) \mid \{ \text{Deus}/x, y/\text{filho}(x) \}$

# Unificação

## MGU - Unificador Mais Geral

Exemplo 1: Encontre o MGU de  $\{ p(x, f(x)), p(y, f(a)) \}$

**MGU:**  $\{ y/x, a/x \}$

# Unificação

Exemplo 2:  $\{ p( f(x), y, g(y) ), p( y, f(a), g(a) ) \}$

- 1) Conflito:  $\{ f(x), y \} \rightarrow \{ p( f(x), f(x), g(f(x)) ), p( f(x), f(a), g(a) ) \}$
- 2) Conflito:  $\{ x, a \} \rightarrow \{ p( f(a), f(a), g(f(a)) ), p( f(a), f(a), g(a) ) \}$
- 3) Conflito:  $\{ f(a), a \} \rightarrow$  **Não é unificável.**

# Unificação

Exemplo 3:  $\{ p( a, x, f( g(y) ) ), p( z, h(z, w), f(w) ) \}$

1) Conflito:  $\{ a, z \} \rightarrow \{ p( a, x, f( g(y) ) ), p( a, h(a, w), f(w) ) \}$

2) Conflito:  $\{ x, h(a, w) \} \rightarrow \{ p( a, x, f( g(y) ) ), p( a, x, f(w) ) \}$

3) Conflito:  $\{ g(y), w \} \rightarrow \{ \mathbf{p( a, x, f(w) )}, \mathbf{p( a, x, f(w) )} \}$

2b) Conflito:  $\{ x, h(a, w) \} \rightarrow \{ p( a, h(a, w), f(w) ), p( a, h(a, w), f(w) ) \}$

# Prova por Árvore de Refutação

# Passos

1. FNC - Forma Normal Causal
2. Negar a Conclusão
3. Árvore de Refutação

Prove a validade  
usando Árvore de  
Refutação...

LÓGICA  
PROPOSICIONAL

# Exemplo 1

$A \rightarrow F$

$\neg F$

---

$\neg A$

Chega-se num absurdo, portanto o argumento é válido.

# Exemplo 2

$A \rightarrow F$

F

---

A

# Exemplo 3

$A \rightarrow F$

$F$

---

$\neg A$

Não chega em absurdo. Nada pode provar.

# Exemplo 4

$J \rightarrow G$

$\neg J \rightarrow T$

$G \rightarrow C$

$\neg C$

---

T

Válido

# Exemplo 5

$\{P \vee (Q \vee R), \neg R\} \models P \vee Q$

Válido

Prove a validade  
usando Árvore de  
Refutação...

LÓGICA DE  
PREDICADOS

# Exemplo 0 - [PUCSP]

Todos os humanos são racionais.

Alguns animais são humanos.

---

Portanto, alguns animais são racionais.

**Argumento Válido**

# Exemplo 1 - [PUCSP]

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$$

**Argumento Válido**

## Exemplo 2 - [PUCSP]

Todos os cientistas são estudiosos.  $\Leftrightarrow (\forall x)(C(x) \rightarrow E(x))$

Alguns cientistas são inventores.  $\Leftrightarrow (\exists x)(C(x) \wedge I(x))$

---

Alguns estudiosos são inventores.  $\Leftrightarrow (\exists x)(E(x) \wedge I(x))$

**Argumento Válido**

## Exemplo 3 - [PUCSP]

Nenhum estudante é velho.  $\Leftrightarrow (\forall x)(E(x) \rightarrow \neg V(x))$

Alguns jovens não são estudantes.  $\Leftrightarrow (\exists x)(J(x) \wedge \neg E(x))$

---

Alguns velhos não são jovens.  $(\exists x)(V(x) \wedge \neg J(x))$

**Argumento Não Válido**

## Exemplo 4 - [PUCSP]

$(\forall x)(\exists y)P(x, y) \mid P(a, a)$

**Argumento Não Válido**

## Equivalências Notáveis

<b>Identificação</b>	<b>Fórmula H</b>	<b>Fórmula G</b>
<b>Dupla Negativa</b>	$\neg(\neg E)$	E
<b>Propriedades de Identidade</b>	$E \vee \text{False}$	E
	$E \wedge \text{True}$	E
<b>Propriedades Complementares</b>	$E \vee \neg E$	True
	$E \wedge \neg E$	False
<b>Leis de Morgan</b>	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
<b>Contraposição</b>	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$
<b>Propriedades de Substituição</b>	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
<b>Propriedades Comutativas</b>	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
<b>Propriedades Associativas</b>	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
<b>Propriedades Distributivas</b>	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
<b>Prova Condicional</b>	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

## Regras de Inferências Lógicas

- **Adição:**  $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{Q}{P \vee Q}$
- **Conjunção:**  $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
- **Simplificação Disjuntiva:**  $\frac{(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)}{P}$
- **Absorção:**  $\frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow (P \wedge Q)}$
- **Modus Ponens:**  $\frac{P \wedge (P \rightarrow Q)}{Q}$
- **Modus Tollens:**  $\frac{\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)}{\neg P}$
- **Silogismo Hipotético:**  $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow R}$
- **Silogismo Disjuntivo:**  $\frac{(P \vee Q) \wedge \neg P}{Q} \quad \frac{(P \vee Q) \wedge \neg Q}{P}$
- **Dilema Construtivo:**  $\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \vee R) \rightarrow (Q \vee G))} \quad \frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow G)}{((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge G))}$

# Bibliografia

- [Pereira] Lógica de Predicados (Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira)
  - PDF: <https://www.ime.usp.br/~slago/IA-logicaDePredicados.pdf>
  - Apresentação: <https://www.ime.usp.br/~slago/ia-3.pdf>
- [Wikipedia]
  - [https://pt.wikipedia.org/wiki/Lógica\\_de\\_primeira\\_ordem](https://pt.wikipedia.org/wiki/Lógica_de_primeira_ordem)
- [PUCSP] O CÁLCULO DE PREDICADOS DE 1ª ORDEM
  - <https://www.pucsp.br/~logica/CalculodePredicados.htm>

# Introdução à Lógica Computacional ILC 2019.2

Aula: Lógica de Predicados II

Mestrando: Daniel da Silva Costa

Professora: Dra. Ana Cristina Bicharra Garcia

UNIRIO

