Introdução à Lógica Computacional

Unificação

Cláusulas em LP

- Vimos que podemos transformar uma fórmula da lógica de predicados **H** em uma fórmula **G** tal que **H** é insatisfazível sse G é insatisfazível
- Além disso G é da forma $(\forall x1)...(\forall xn)F$, com F aberta
  - Regras para ficar apenas com os conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$
  - Forma prenex
  - Skolemização
- Com isso, transformando F em CNF podemos passar à forma clausal

Exemplo

- Nos slides da aula anterior
  - $H = (\forall x)(\forall z)((\forall y1)\ p(y1) \wedge ((\forall y2)\ q(y2) \rightarrow (\exists y3)(r(x,y3,z))))$
- Após algoritmo Prenex temos
  - $H' = (\forall x)(\forall z)(\forall y1)(\exists y2)(\exists y3)(p(y1) \wedge (\neg q(y2) \vee r(x, y3, z)))$
    - Note que H' é equivalente a H
- Após Skolemização temos
  - $G = (\forall^*)(p(y1) \wedge \neg q(g(y1, z, x)) \vee r(x, f(y1, z, x), z)))$
    - G é insatisfazível sse H é insatisfazível.

Exemplo

- $G = (\forall^*)(p(y1) \land \neg q(g(y1, z, x)) \lor r(x, f(y1, z, x), z)))$
- G pode ser escrita na forma clausal
  - 1ª. cláusula: $p(y1)$
  - 2ª. cláusula: $\neg q(g(y1, z, x)) \lor r(x, f(y1, z, x), z))$
- Em notação de conjuntos:
  - $\{[p(y1)], [\neg q(g(y1, z, x)), r(x, f(y1, z, x), z))]\}$
- A partir da forma clausal podemos pensar em RESOLUÇÃO!

Exemplo na aula anterior

- As cláusulas $\{p(f(y1))\}$ e $\{\neg p(f(y1)), r(x, f1(y1,z,x), z)\}$ possuem os literais complementares $p(f(y1))$ e $\neg p(f(y1))$
- As cláusulas $\{p(f(y1))\}$ e $\{\neg p(f(w)), r(x, f1(y1,z,x), z)\}$ possuem literais “quase” complementares $p(f(y1))$ e $\neg p(f(w))$
- Seriam complementares se y1 fosse substituído por w.
- A unificação vai encontrar uma substituição adequada para esses casos
  - Que chamaremos de unificador mais geral (umg). Veremos a seguir...

Substituição

- Substituições são os elementos básicos da unificação
- Definição: Uma **substituição** em LP é um conjunto

$$\theta = \{x1 \leftarrow t1, \ldots, xn \leftarrow tn\},$$

onde $\forall$i, xi é variável (a ser substituída) e ti é termo tal que xi $\neq$ ti. Além disso, $\forall$i, j tem-se que xi$\neq$ xj se i $\neq$ j. O conjunto vazio { } é a substituição vazia

Aplicação de Substituição

- Sejam S um conjunto de expressões e a substituição

$$\theta = \{x1 \leftarrow t1, \ldots, xn \leftarrow tn\}.$$

A aplicação de θ em S, denotada por $S\theta$, é o conjunto obtido de S, substituindo simultaneamente todas as ocorrências de xi em S por ti para $1 \leq i \leq n$. Se $\theta = \{\ \}$, então $S\theta = S$.

Aplicação de Substituição - Exemplo

- Exemplo:
  - $C1 = \{p(y1), \neg q(y1, z, x)\}$
  - $C2 = \{\neg p(x), q(w), r(w, y1, z, x, z)\}$
  - $\theta = \{y1 \leftarrow w, w \leftarrow g(a, z, x), x \leftarrow w\}$
- RESULTADO
  - $C1\theta = \{p(w), \neg q(w, z, w)\}$
  - $C2\theta = \{\neg p(w), q(g(a, z, x)), r(g(a, z, x), w, z, w, z)\}$

O resultado seria diferente se as substituições fossem feitas sequencialmente ao invés de simultaneamente!

Composição de Substituições

- Dada duas substituições , a composição $\theta 1 \theta 2$ é definida de tal forma que se tenha a propriedade

$$S(\theta 1 \theta 2) = (S \theta 1) \theta 2$$

Onde S é um conjunto de expressões.

Composição de Substituições: Definição

- Considere as substituições:
  - $\theta 1 = \{x1 \leftarrow t1, \ldots, xn \leftarrow tn\}$
  - $\theta 2 = \{y1 \leftarrow s1, \ldots, ym \leftarrow sm\}$
- A composição de $\theta 1$ e $\theta 2$, denotada por $\theta 1\theta 2$, é calculada como:
  - Passo 1: Construa o conjunto
    - $\phi = \{x1 \leftarrow t1\theta 2, \ldots, xn \leftarrow tn\theta 2, y1 \leftarrow s1, \ldots, ym \leftarrow sm\}$
  - Passo 2: Retire de ϕ as substituições $yi \leftarrow si$ tal que $yi = xj$ para algum j, $1 \leq j \leq n$. Faça igual ϕ ao novo conjunto.
  - Passo 3: Retire de ϕ as substituições $xi \leftarrow ti\theta 2$ tal que $xi = ti\theta 2$. Faça $\theta 1\theta 2$ igual ao conjunto obtido.

Composição de Substituições: Exemplo

- Considere as substituições:
  - $\theta1 = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow z, z \leftarrow x\}$
  - $\theta2 = \{y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}$
- $\theta1\theta2$:
  - Passo 1:
    - $\phi = \{x \leftarrow f(w), w \leftarrow w, z \leftarrow z, y \leftarrow w, x \leftarrow z, z \leftarrow w\}$
  - Passo 2:
    - $\phi = \{x \leftarrow f(w), w \leftarrow w, z \leftarrow z, y \leftarrow w\}$
  - Passo 3:
    - $\phi = \{x \leftarrow f(w), y \leftarrow w\} = \theta1\theta2$

Mais conceitos que vamos precisar...

Conjunto de diferenças (D)

- Definição
  - Seja S = {A1, …, Am} um conjunto finito de expressões. O conjunto de diferenças de S é determinado pelos procedimentos a seguir:
    - Passo 1: Aponte para o símbolo mais à esquerda em cada expressão Ai, $1 \leq i \leq m$
    - Passo 2: Enquanto todos os símbolos apontados coincidirem, desloque simultaneamente o apontador para o próximo símbolo, à direita, em cada expressão Ai.
    - Passo 3: Se forem encontrados símbolos apontados que não coincidem, então retire a subexpressão Ei de cada expressão Ai, que inicia no símbolo de diferença. Faça o conjunto de diferenças de S igual a D = {E1, …, Em}. Caso contrário, faça D = { }.

Conjunto de diferenças (D)

- Exemplo
  - Verifique que o conjunto de diferenças associado a
    - $S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), a)\}$

é $D = \{f(x), z\}$

Expressões Unificáveis

- Um conjunto de expressões S é unificável se existe uma substituição θ tal que $|S\theta| = 1$. Neste caso θ, é denominado de unificador de S.
- Exemplo:
  - Verifique que ambas as substituições abaixo são unificadores para o conjunto de expressões S = {p(x,y), p(w,x)}
    - $\theta 1 = \{x \leftarrow w, y \leftarrow x\}$; $\theta 2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a, w \leftarrow a\}$
    - $\theta 1$ é mais geral que $\theta 2$ (que por sua vez é mais específica)
      - $\theta 1$ substitui x pela variável w, que por sua vez pode ser igual ou diferente da constante “a”.
      - É possível obter $\theta 2$ a partir de $\theta 1$, pois
        - $\theta 2 = \theta 1\{w \leftarrow a, x \leftarrow a\}$

Unificador Mais Geral (umg)

- Definição: Seja θ um unificador do conjunto de expressões S. θ é um unificador mais geral de S, umg, se para qualquer unificador ψ de S, existe uma substituição ϕ tal que $\psi = \theta\phi$
  - É possível ter mais de um umg para um conjunto de expressões
- Obtendo o umg de um conjunto de expressões S
  - O algoritmo da unificação determina o umg para um conjunto de expressões (da LP) S fornecido, ou informa que S não é unificável.

Algoritmo da Unificação

- Seja S um conjunto de expressões da Lógica de Predicados. Se S é unificável, o algoritmo a seguir determina um umg de S, caso contrário ele indica que S não é unificável. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e θk substituições.
  - Passo 1. Faça $k = 0$ e $\theta 0 = \{ \}$.
  - Passo 2. Se $|S\theta k| = 1$, então pare! θk é um umg de S. Caso contrário, determine o conjunto de diferenças Dk de $S\theta k$.
  - Passo 3. Se existe uma variável x e um termo t em Dk tal que x não ocorre em t, então faça $\theta k{+}1 = \theta k\{x \leftarrow t\}$, $k = k+1$ e vá para o passo 2. Caso contrário, pare! S não é unificável

Exemplo

- $S = \{p(f(x), y, x), p(z, g(z), w)\}$

1. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}$.
2. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}, S\theta_0 = S = \{\ p(f(x), y, x), p(z, g(z), w)\ \}, |S\theta_0| \neq 1, D_0 = \{f(x), z\}$
3. $z, f(x) \in D_0$ e z não ocorre em $f(x)$. $\theta_1 = \{\ \}\{z \leftarrow f(x)\} = \{z \leftarrow f(x)\}, k = 1$.
4. $k = 1, \theta_1 = \{z \leftarrow f(x)\}, S\theta_1 = \{\ p(f(x), y, x), p(f(x), g(f(x)), w)\ \}, |S\theta_1| \neq 1$, $D_1 = \{y, g(f(x))\ \}$
5. $y, g(f(x)) \in D_1$ e y não ocorre em $g(f(x))$. $\theta_2 = \{z \leftarrow f(x)\}\{y \leftarrow g(f(x))\} = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\ \}, k = 2$.
6. $k = 2, \theta_2 = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}, S\theta_2 = \{\ p(f(x), g(f(x)), x), p(f(x), g(f(x)), w)\}$, $|S\theta_2| \neq 1,\ D_2 = \{x, w\}$
7. $x, w \in D_2$ e x não ocorre em w. $\theta_3 = \{z \leftarrow f(x), y \leftarrow g(f(x))\}\{x \leftarrow w\} = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}, k = 3$.
8. $k = 3, \theta_3 = \{z \leftarrow f(w), y \leftarrow g(f(w)), x \leftarrow w\}, S\theta_3 = \{p(f(w), g(f(w)), w)\}, |S\theta_3| = 1$. Pare! θ_3 é um umg de S.

Atenção

$$S = \{p(f(x)), p(x)\}.$$

A aplicação do algoritmo da unificação em S tem o seguinte desenvolvimento.

1. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}$.
2. $k = 0, \theta_0 = \{\ \}, S\theta_0 = S = \{p(f(x)), p(x)\}, |S\theta_0| \neq 1, D_0 = \{f(x), x\}$
3. $x, f(x) \in D_0$. Neste caso x ocorre em f(x). Pare! S não é unificável. Se o teste de ocorrência não é considerado, o algoritmo continua. Ele obtém a substituição $\theta_1 = \{\ \}\{x \leftarrow f(x)\} = \{x \leftarrow f(x)\}$, faz k = 1 e tem o seguinte desenvolvimento.
4. $k = 1, \theta_1 = \{x \leftarrow f(x)\}, S\theta_1 = \{p(f(f(x))), p(f(x)\}, |S\theta_1| \neq 1, D_1 = \{x, f(x)\}$
5. $x, f(x) \in D_0$. Neste caso x ocorre em f(x). Novamente, se o teste de ocorrência é desconsiderado,

   $\theta_2 = \{x \leftarrow f(x)\}\{x \leftarrow f(x)\} = \{x \leftarrow f(f(x))\}$ e k = 2, teríamos.
6. $k=2, \theta_2 = \{x \leftarrow f(f(x))\}, S\theta_2 = \{p(f(f(f(x)))), p(f(f(x))\}, |S\theta_2| \neq 1, D_2 = \{x, f(x)\}$

Este processo ocorre indefinidamente e os conjuntos $S\theta_k$ terão expressões cada vez maiores, não sendo possível unificá-los. Tal fato demonstra a importância do teste de ocorrência executado no passo 3.