Notas de aula: ILC

Variáveis livres e ligadas

Unificação

Skolemização

Tableau

Variável Livre e variável ligada

- Se x é uma variável e E uma fórmula, uma ocorrência de x em E é
  - Ligada, se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E
  - Livre, se não for ligada

- $G=(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x,y,w,z)\rightarrow (\forall y)q(z,y,x,z1))$

- No exemplo anterior, z1 é livre e x, y e z são ligadas!

Sentenças gfechadas

- Sentenças ditas fechadas não possuem variáveis livres
- O exemplo anterior não é, mas, adicionando $(\forall w)$, $(\exists z)$ e $(\forall z1)$...

- $G1=(\forall w)(\exists z)(\forall z1)(\forall x)(\exists y)\ ((\forall x)p(x,y,w,z)\rightarrow(\exists y)q(z,y,x,z1))$ é fechada

Símbolos livres

- Símbolos livres de uma fórmula são suas variáveis livres, símbolos de função e de predicado
  - Tudo menos os conectivos, variáveis dos quantificadores, símbolos de verdade e de pontuação
- Ex: O conjunto {w,z,z1,p,q} no exemplo anterior

Fecho de uma sentença

- Se H é sentença da Lógica de Predicados e
- {x1, x2, ..., xn} é o conjunto das variáveis livres em H

- O fecho universal de H, $(\forall *)H$, é $(\forall x1)(\forall x2)...(\forall xn)$

- O fecho existencial de H, $(\exists *)H$, é $(\exists x1)(\exists x2)...(\exists xn)$

Unificação

Definição

Um conjunto de literais $\mathcal{L}$ é *unificável* se existe uma substituição *sub* que aplicada a $\mathcal{L}$ torna o conjunto singular (*i.e.*, os vários literais convertem-se num só).

Unificações não são necessariamente únicas

Seja $\mathcal{L} = \{P(f(x), y), P(z, w)\}$.

- Vimos que se $sub_1 = \{f(x)/z\}\{w/y\}$ então $\mathcal{L}sub_1 = \{P(f(x), w)\}$.
- Claro que se $sub_2 = \{w/y\}\{f(x)/z\}$ também $\mathcal{L}sub_2 = \{P(f(x), w)\}$.
- Mas se $sub_3 = \{f(x)/z\}\{a/x\}\{b/y\}$ então $\mathcal{L}sub_3 = \{P(f(x), y), P(f(x), b)\}\{a/x\}\{b/y\} = \{P(f(a), y), P(f(a), b)\}\{b/y\} = \{P(f(a), b)\}$.

Unificador mais geral

Definição

Dado um conjunto de literais $\mathcal{L}$, a substituição *sub* é o *unificador mais geral* de $\mathcal{L}$ (e escreve-se $umg(\mathcal{L})$), se é um unificador de $\mathcal{L}$ e se qualquer outro unificador sub' de $\mathcal{L}$ é tal que $subsub' = sub'$.

Proposição

Um conjunto finito de literais é unificável se e só se tem um unificador mais geral.

Prova-se a proposição apresentando um algoritmo que, dado um conjunto finito de literais, ou retorna a mensagem "não unificável" ou retorna o seu unificador mais geral.

Unificação

Passo 1:

- **Se** o símbolo de predicado de A for diferente do símbolo de predicado de B **então** emitir "não" como saída e parar **senão** criar uma coleção P constituída por pares de termos (t_i,s_i), $i=\{1,2,...,n\}$, obtidos de $A \equiv p(t_1,...,t_n)$ e $B \equiv p(s_1,...,s_n)$.
- Obs.: uma vez que o símbolo de predicado de A e B são o mesmo, suas aridades são iguais

- Passo 2:
  - Escolher aleatoriamente um par (C,D) de P (se P estiver vazio, ir para o Passo 9)
- Passo 3:
  - **Se** $C \equiv f(s_1,...,s_n)$ e $D \equiv f(t_1,...,t_n)$
    Então remover o par (C,D) de P e incluir os pares $(s_1,t_1),...,(s_n,t_n)$ em P e voltar ao Passo 2
    Senão vá para o próximo passo.

- Passo 4:
  - **Se** $C \equiv f(s_1,\ldots,s_n)$ e $D \equiv g(t_1,\ldots,t_n)$

    Então emitir "não" como saída e parar

    Senão vá para o próximo passo.

- Passo 5:
  - **Se** C $\equiv$ D $\equiv$ x (x é uma variável) ou
    C $\equiv$ D $\equiv$ c (c é uma constante)
    Então remover o par (C,D) de P e voltar ao Passo 2, e
- Passo 6:
  - **Se** C $\equiv$ c (constante) e D $\equiv$ d (constante)
    Então emitir "não" como saída e parar
    Senão vá para o próximo passo.

- Passo 7:
  - **Se** C $\equiv$ t (t é um termo que não é variável) e D $\equiv$ x (x é uma variável)
    Então remover o par (C,D) de P e incluir o par (D,C) em P e voltar ao Passo 2
    Senão vá para o próximo passo.

- Passo 8:
  - **Se** C ≡ x (x é uma variável) e D ≡ t (t é um termo) e x ≠ t e x ocorre em algum outro par de P
  - **Então**
    - **Se** x ocorrer em t
    - **Então** emitir “não” e parar
    - **Senão** substituir cada x pelo termo t em todos os outros pares de P e voltar ao Passo 2
  - **Senão** vá para o próximo passo.

- Passo 9:
  - **Se** nenhum passo anterior puder ser executado
  - **Então** emitir “sim”, retornar o umg de A e B dado pela substituição composta pelos pares (C,D) pertencentes ao conjunto P e parar com sucesso
  - **Senão** voltar ao Passo 2.

Unifique as sentenças abaixo

- p(x) q(y,z) NÃO
- p(f(x)) p(g(x)) NÃO
- p(f(x)) p(g(y,z)) NÃO
- p(c) p(d) NÃO
- p(f(c)) p(f(d)) NÃO
- p(f(x,c)) p(f(y,d)) NÃO
- p(x) p(f(x)) NÃO
- p(x) p(a) {(x,a)}
- p(x) p(x) {}

Skolemização

- Considere a wff: $(\forall Y)(\exists X\ p(X,Y))$

que pode ser lida como: para todo Y, existe um X tal que p(X,Y)

- Pelo fato do quantificador existencial estar dentro do escopo do quantificafor universal, está aberta a possibilidade do X que existe, depender do valor Y.
- Esta dependência pode ser explicitamente evidenciada através de uma função *g(Y)* a qual mapeia cada valor de Y no X que existe.
- Essa função é chamada de <u>função de Skolem</u>.
- Se a função de Skolem for utilizada no lugar do X que existe, pode-se eliminar o quantificador existencial e reescrever a fórmula anterior como:
- $(\forall Y)(p(g(Y),Y))$

Skolemização

- A regra geral para a eliminação de um quantificador existencial de uma formula bem formada é a de substituir cada ocorrência de suas variáveis quantificadas existencialmente por uma função de Skolem, que tem como argumentos aquelas variáveis quantificadas universalmente, cujo escopo do quantificador universal inclui o escopo do quantificador existencial sendo eliminado. Por exemplo, dada a fórmula:

- $\forall W\ q(W) \rightarrow \forall X\ (\forall Y\ (\exists Z\ p(X,Y,Z) \rightarrow \forall U\ r(X,Y,Z)))$

- ao eliminar o $\exists Z$ dela, obtém-se

- $\forall W\ q(W) \rightarrow \forall X\ (\forall Y\ p(X,Y,g(X,Y)) \rightarrow \forall U\ r(X,Y,g(X,Y)))$

Skolemização

- Se o quantificador existencial sendo eliminado não está dentro do escopo de nenhum quantificador universal, então é usada a função de Skolem sem argumentos, a qual é simplesmente uma constante. Assim sendo,

$\exists$X p(X) torna-se p(*a*)

- onde o símbolo *a* é usado como referência a um objeto que é sabido que existe. O símbolo *a* deve ser um novo símbolo constante e não um símbolo já usado em referência a objetos conhecidos.

- Para a eliminação de todas as variáveis existencialmente quantificadas de uma wff, usa-se repetidamente, o procedimento descrito.

Tableau semântico: exemplo-mostre a avalidade da sentença

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x))$$

RESPOSTA

<table>
<tr><td>Negação da sentença para mostrar que ser
Á um absurdo (todos os ramos fechados)</td><td rowspan="5">

$$\neg[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x))]$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)),\ \neg(\forall x\, p(x) \rightarrow \forall x\, q(x))$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)),\ \forall x\, p(x),\ \neg\forall x\, q(x)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)),\ \forall x\, p(x),\ \neg q(a)$$

$$\forall x(p(x) \rightarrow q(x)),\ p(a),\ \neg q(a)$$

$$p(a) \rightarrow q(a),\ p(a),\ \neg q(a)$$

$$\neg p(a), p(a), \neg q(a) \qquad\qquad q(a), p(a), \neg q(a)$$

$$\times \qquad\qquad\qquad\qquad \times$$

</td></tr>
<tr><td>“, “significa “e” Usando DeMorgan</td></tr>
<tr><td>Instanciando a variável universal com qualquer elemento do conjunto
Lembre-se que no caso do universal pode repetir a variável que já foi usada</td></tr>
<tr><td>Lembre-se também que p→q é equivalente a ˜p ou q</td></tr>
<tr><td>Por isso abre-se no final dois ramos</td></tr>
</table>

Tableau:

Mostre o que foi feito ERRADO na prova de validade da sentença abaixo usando tableau:

$$\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x))$$

PROVA

$$\neg[\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x))]$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg(\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x))$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \exists x\ \neg p(x), \exists x\ \neg q(x)$$

$$\forall x(p(x) \vee q(x)), \neg p(a), \exists x \neg q(x)$$

$$p(a) \vee q(a), \neg p(a), \exists x \neg q(x)$$

$$p(a), \neg p(a), \exists x \neg q(x) \qquad q(a), \neg p(a), \exists \neg q(x)$$

$$\times$$

$$q(a), \neg p(a), \neg q(a)$$

$$\times$$

Instanciar variável com escopo do quantificador existencial com variável já usada anteriormente

A sentença não é válida
A prova feita está errada

Tableau: exemplo de prova

(FORALL X)(A(X) → B(X)) ^ (EXISTS X)(A(X)), então queremos mostrar que existe um X tal que B(X) é verdadeiro

Temos 2 axiomas

1- Γ1 = (PARA_TODO X)(A(X) → B(X))
2- Γ2 = (EXISTE X)(A(X))

Queremos mostrar: Γ1 ^ Γ2 |-- C
Isto é, C= (EXISTE X)(B(X)) é consequência lógica dos 2 axiomas

Usando o método da refutação no tableau
Negamos a conclusão: NOT C

3- NOT ((EXISTE X) (B(X))

Usando o Tableau

2- (EXISTE X)(A(X))
Instanciando X= tomate
A(tomate)

1-(PARA_TODO X)(A(X) → B(X)) equivale
1-(PARA_TODO X)(~A(X) v B(X) (O x pode ser qualquer mas tem que ser o mesmo

~A(tomate) | B(tomate)

{} | 1-NOT ((EXISTE X)(B(X))
PARA_TODO ~B(X)

Podemos colocar o valor de x como qualquer coisa, inclusive tomate
X= tomate
~B(tomate)
{}