

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA

Raphael Marques Coelho Esposito

*Teoria Matemática do Controle aplicada ao problema do
pêndulo*

Rio de Janeiro
2016

Raphael Marques Coelho Esposito

*Teoria Matemática do Controle aplicada ao problema do
pêndulo*

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Gladson Octaviano Antunes
Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro
2016

Esposito, Raphael

Teoria Matemática do Controle aplicada ao problema do pêndulo

/ Raphael Esposito - 2016

32.p

1. Teoria Matemática de Controle 2. Equações Diferenciais 3. Modelagem Matemática. I. Matemática II. Teoria de Controle

CDU 536.21

Raphael Marques Coelho Esposito

*Teoria Matemática do Controle aplicada ao problema do
pêndulo*

Monografia apresentada ao Curso de Matemática
da UNIRIO, como requisito para a obtenção par-
cial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 07 de Dezembro de 2016

BANCA EXAMINADORA

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Michel Cambraíha de Paula

Doutor em Matemática - IMPA

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

*Dedico este trabalho a minha família pelo total
apoio que me deram durante minha vida.*

Resumo

A Teoria de Controle para sistemas governados por Equações Diferenciais é um ramo da Matemática com inúmeras aplicações práticas. Neste Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação será utilizado o problema de controlar o movimento de um pêndulo simples com o objetivo de ilustrar as principais ideias e ferramentas matemáticas empregadas nessa área. O problema que discutiremos aqui, longe de ser puramente acadêmico, surge em muitas aplicações tecnológicas, uma delas está presente na área de robótica quando há interesse em controlar um braço mecânico.

Palavras-chaves: Teoria de Controle, Equações Diferenciais

Abstract

The control theory for systems governed by differential equations is a branch of mathematics with numerous practical applications. In this final project will be used the problem of controlling the movement of a simple pendulum in order to illustrate the main ideas and mathematical tools used in this area. The problem that will be discussed here, far from being purely academic, comes in many technological applications, one of them is present in robotics when there is interest in controlling a mechanical arm.

Keywords: Differential Equations, Control Theory.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, sempre presente em minha vida, seja nos momentos bons ou ruins. A minha família e meus amigos, pelo grande incentivo nos estudos como forma de enfrentar as dificuldades da vida e tornar uma sociedade melhor de se viver. A todos os meus professores, que me ajudaram na minha trajetória na faculdade, em especial ao meu orientador, Gladson, por todo carinho e dedicação comigo durante a elaboração deste trabalho.

*“Temos de fazer o melhor que podemos.
Esta é a nossa sagrada responsabilidade
humana.”*

Albert Einstein

Sumário

1	Introdução	7
2	Desenvolvimento Histórico da Teoria de Controle	9
2.0.1	Os aquedutos Romanos	9
2.0.2	O pêndulo isócrono de Christiaan Huygens	10
2.0.3	James Watt, a Revolução industrial e além	17
3	Equações Diferenciais	21
3.1	Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem	21
4	Controle do Pêndulo	24
5	Conclusão	32
	Referências Bibliográficas	33

1 Introdução

A teoria matemática do controle ou simplesmente teoria de controle é uma área da matemática com fortes características interdisciplinares. Não por acaso, uma vez que tal teoria começou seu desenvolvimento na Engenharia, para posteriormente ganhar destaque como um ramo da Análise Matemática. Em muitas das aplicações percebe-se a atuação de profissionais das áreas de Matemática, Engenharia e Computação.

Essa teoria possibilitou a criação de dispositivos que se comportam conforme a nossa vontade. Como exemplos podemos citar: aparelhos de ar condicionado, estabilização de drones, robôs, máquinas industriais, etc. Seu desenvolvimento tem sido muito importante nos dias atuais e tem se mostrado fundamental para o progresso tecnológico alcançado em diversas áreas nas últimas décadas. Importante mencionar também o impacto da Teoria de Controle em áreas como a biologia e economia.

Desde antiguidade, o homem vem procurando meios que facilitem sua vida. Há uma citação de Aristóteles no capítulo três do primeiro volume de sua obra “Política”, que remete bem essa ideia:

“... Se cada instrumento pudesse realizar suas funções individuais, respondendo ou antecipando o trabalho dos outros... os patrões não necessitariam mais de servos ou capatazes.”

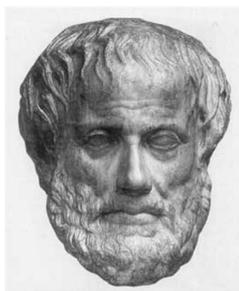


Figura 1.1: Aristóteles.

Essa ideia expressa significativamente o que vem ser a teoria do controle: automação de processos com o objetivo de dar liberdade e conseqüentemente acarretar uma melhoria da qualidade de vida do ser humano. A palavra controle aqui não se remete a falta de liberdade, e sim, a controlar e intervir no ambiente em que vivemos.

O objetivo principal aqui consiste em apresentar as ideias básicas do ramo da Análise Matemática conhecido, nos dias atuais, como Teoria Matemática do Controle. Para isso o trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 são descritas algumas passagens históricas que marcaram alguns dos importantes avanços proporcionados pelo desenvolvimento de mecanismos de controle. Veremos que as ideias embrionárias dessa teoria começaram na Roma antiga, impulsionaram a Revolução Industrial nos séculos XVIII e XIX e ganharam grande destaque no período Pós Segunda Guerra Mundial. O Capítulo 3 é dedicado a apresentação de algumas preliminares matemáticas relacionadas ao estudo de equações diferenciais. Seguindo os passos apresentados em [3], recorreremos ao problema relacionado ao Controle da dinâmica de um Pêndulo para ilustrar as ideias básicas da Teoria de Controle. Tal situação encontra relação direta com uma importante aplicação tecnológica, o problema de controlar o movimento de um braço robótico. Tais ideias são desenvolvidas no Capítulo 4.

2 Desenvolvimento Histórico da Teoria de Controle

Apresenta-se a seguir uma breve descrição de algumas passagens históricas que marcaram o desenvolvimento da Teoria de Controle. Vamos mergulhar em tempos onde a tecnologia que temos hoje era um sonho distante.

2.0.1 Os aquedutos Romanos

Se voltarmos no tempo, veremos claramente que os romanos utilizavam algumas ideias da Teoria do Controle em seus aquedutos. Tais estruturas possuíam sistemas engenhosos de válvulas de regulação construídos com o objetivo de manter a água em nível constante.



Figura 2.1: Aqueduto.

As cidades antigas eram geralmente construídas perto de onde havia muita água, como foi o caso de Roma. Naquele período, a cidade estava crescendo e a demanda por água era cada vez maior. O primeiro aqueduto romano foi construído por volta de 312 a.C. e o último em 226 d.C. Havia no total 11 aquedutos principais que atendiam Roma.

Os aquedutos romanos foram construídos para funcionar usando a gravidade. Seus túneis se localizavam no nível do solo e do subsolo, com uma pequena inclinação para manter a água fluindo com a força da gravidade. Quando havia empecilhos, como por exemplo o aqueduto passar por um vale, eram instalados canos fechados ao invés de

túneis. A água era então transportada usando um método conhecido como sifão invertido, que forçava a água do solo superior para o solo inferior e de volta para um terreno mais alto usando para isso a própria pressão da água.

A tecnologia presente nos aquedutos permitiu que os romanos construíssem cidades grandes em áreas com planícies secas. O sistema de regulação do nível de água nos aquedutos é considerado como o primeiro exemplo de um mecanismo de controle.

2.0.2 O pêndulo isócrono de Christiaan Huygens

Christiaan Huygens nasceu em 14 de abril de 1629 em Haia, Países Baixos e faleceu em 8 de julho de 1695. Matemático, físico e astrônomo, dedicou quarenta anos de sua vida tentando desenvolver e melhorar cronômetros marítimos. Nos séculos XVII e XVIII a medição de tempo era de extrema importância para a navegação. Naquela época estavam acontecendo as Grandes Navegações.

Huygens estava interessado na construção de um pêndulo isócrono, isto é, um pêndulo que tivesse o mesmo período qualquer que fosse a sua amplitude de oscilação. Isto significa que qualquer que seja a altura da qual o pêndulo seja largado, ele chegará ao ponto mais baixo de sua trajetória no mesmo intervalo de tempo.

Conforme Burrowes e Farina [2], a construção desse tipo de pêndulo era de suma importância na época das Grandes Navegações, pois o balanço dos navios alterava as amplitudes de oscilação do pêndulo. Dessa forma, a construção de um pêndulo isócrono traria grande impacto para a navegação, uma vez que possibilitaria a medição precisa de tempo e conseqüentemente a localização mais precisa dos navios durante a navegação.

Huygens se tornou um especialista nas propriedades peculiares da cicloide (figura abaixo) e não foi preciso muito tempo para perguntar a si próprio se essa curva particular não lhe traria ajuda para resolver o problema do pêndulo isócrono.

Sua intuição estava correta: se um pêndulo simples tiver seu movimento restrito por obstáculos que obriguem a partícula presa em seu extremo inferior a descrever uma trajetória cicloidal, seu período será o mesmo para qualquer que seja a amplitude de oscilação. Para resolver seu problema inicial, Huygens demonstrou que os obstáculos deveriam ter uma forma cicloidal para que a trajetória do pêndulo fosse cicloidal. Dessa forma, caso tivéssemos três pêndulos e fossem soltos de alturas diferentes, ambos chega-

riam ao ponto mais baixo de sua trajetória ao mesmo tempo. Abaixo vemos uma figura mostrando esse tipo de comportamento.

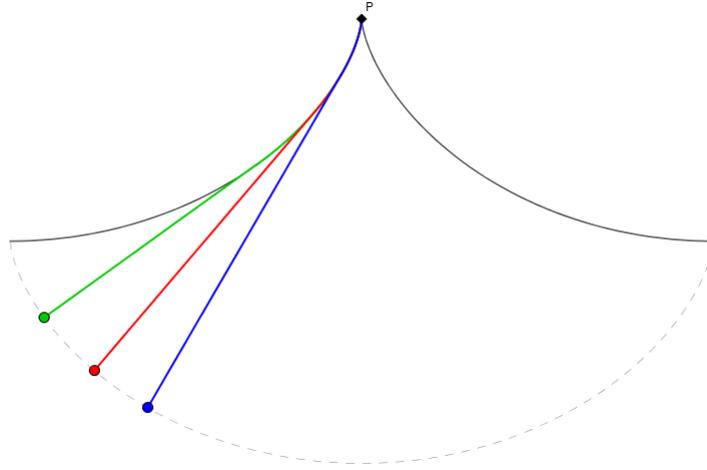


Figura 2.2: Pêndulo Isócrono.

A cicloide possui características tão interessantes que pensamos ser válido dedicarmos uma seção para ela no trabalho.

A cicloide

A cicloide é a curva traçada por uma partícula fixa numa circunferência que rola sem deslizar ao longo de uma reta. Esta curva foi inicialmente chamada de “Helena da geometria” em analogia ao fato histórico conhecido como “Helena de Tróia”, que era uma mulher cobiçada e disputada por muitos homens na época. No caso da cicloide, ela era cobiçada e disputada pela comunidade matemática.

As propriedades geométricas da cicloide foram, ao longo dos tempos, inspirações para grandes matemáticos da história. O termo cicloide foi cunhado por Galileu em 1599, quando sugeriu que arcos na forma de cicloide seriam de grande beleza para uma ponte.

Vejamos como podemos determinar e representar uma cicloide por meio de equações paramétricas.

Consideremos que a circunferência de raio r que gera a Cicloide, desliza no sentido positivo do eixo x , sendo θ o parâmetro escolhido para descrever a curva. Veja a figura abaixo.

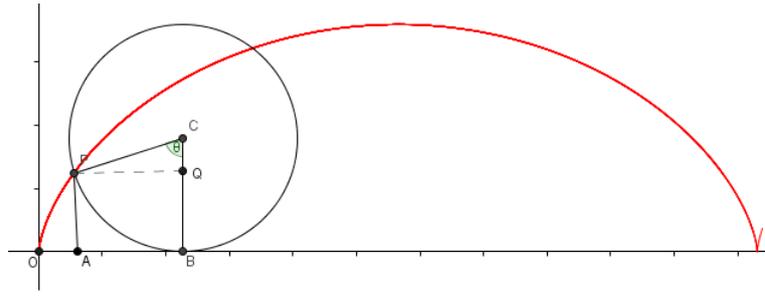


Figura 2.3: Ciclóide.

O ângulo θ é o ângulo varrido pelo raio $r = |CP|$ quando a circunferência desliza para uma nova posição. Observe que quando $\theta = 0$, $P(x, y)$ está na origem 0.

Do triângulo retângulo ΔPQC vem que

$$\cos \theta = \frac{|QC|}{r} \iff |QC| = r \cos \theta$$

$$\text{sen} \theta = \frac{|PQ|}{r} \iff |PQ| = r \text{sen} \theta$$

As coordenadas x e y do ponto P são determinadas da seguinte forma

$$x = |OB| - |AB| = |OB| - |PQ| = r\theta - r \text{sen} \theta = r(\theta - \text{sen} \theta)$$

$$y = |BC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide são dadas por

$$\begin{cases} x = r(\theta - \text{sen} \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (2.1)$$

A cicloide possui duas propriedades muito interessantes. Nesta seção vamos focar na propriedade conhecida como tautocronismo, uma vez que foi esta a propriedade utilizada por Huygens para construir os relógios mencionados na seção anterior.

O Tautocronismo, que vem do grego *tauto* que significa igual e *chronos* que é tempo, foi descoberto em meados de 1656 por Christian Hyugens.

Huygens provou que um objeto, partindo do repouso e deixado deslizar sem atrito sobre um arco de cicloide invertido, atinge o nível inferior em um intervalo de tempo que independe do ponto de partida. Em outras palavras, um pêndulo que se desloca ao longo de uma cicloide invertida apresenta um período de oscilação que não depende da amplitude do movimento. A prova foi publicada em seu livro *Horologium Oscillatorium*, veja figura abaixo.

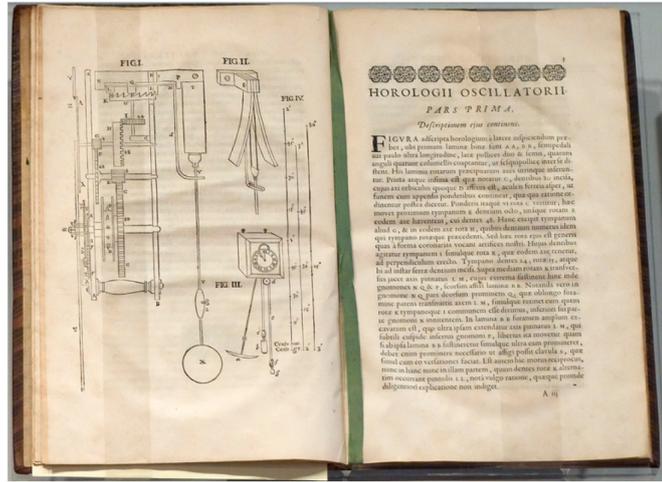


Figura 2.4: Livro Horologium Oscillatorium.

Antes de demonstrar que a cicloide é uma curva Tautócrona, vamos provar uma outra propriedade importante desta curva e que será útil para demonstração do resultado que queremos provar.

Definição 2.0.1. *O comprimento S de um arco de cicloide é $S = 8r$.*

Prova: Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário da circunferência que gera a cicloide. A partir das equações paramétricas obtidas em (2.1), derivando com relação a θ , obtém-se

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) \text{ e } \frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen} \theta. \quad (2.2)$$

Da definição de comprimento de arco S de uma curva parametrizada e por (2.2), segue que

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[r(1 - \cos \theta)]^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(2 - 2 \cos \theta)} d\theta \\ &= r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para calcular a última integral em (2.3) utiliza-se a relação

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \iff \sqrt{1 - \cos \theta} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (2.4)$$

Então, usando (2.4) em (2.3), vem que

$$S = 2r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 4r \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4r (-\cos \pi + \cos 0) = 4r \cdot 2 = 8r. \quad \square$$

Veja que o comprimento do arco de uma cicloide, $8r$, é maior que o comprimento da circunferência que a gera, $2\pi r$.

Estamos prontos para provar que a cicloide é uma curva Tautócrona.

Teorema 2.0.1. *A cicloide é uma curva Tautócrona.*

Demonstração: Considera-se uma cicloide invertida, de modo que possa deslizar, sobre a mesma, uma partícula de massa m , inicialmente em repouso, que parte de um ponto $A(x(\theta_a), (y(\theta_a)))$ para um ponto mais baixo da curva com $\theta_a \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

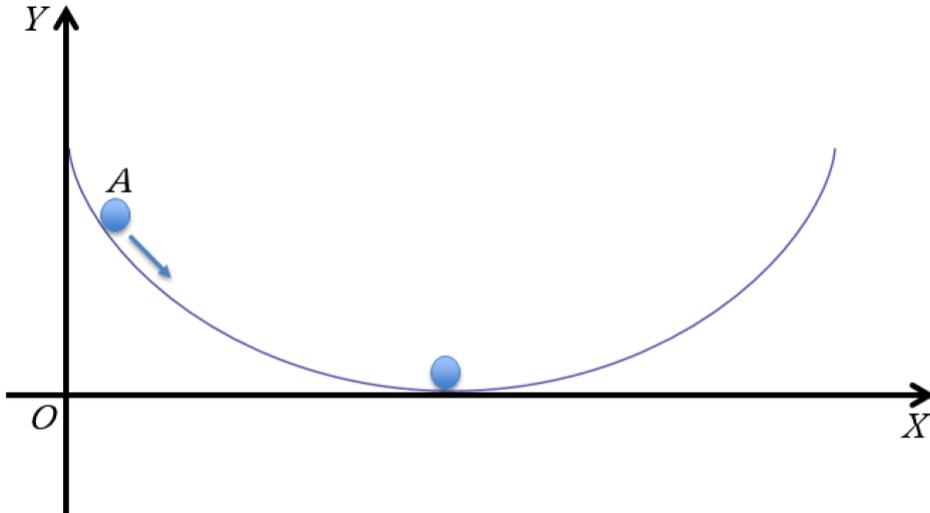


Figura 2.5: Cicloide invertida.

Devemos mostrar que independentemente do ponto escolhido na cicloide o tempo que a partícula leva para chegar no ponto mais baixo da curva é o mesmo. Vamos calcular o tempo que a partícula demora para efetuar esse deslocamento. Para isso vamos recorrer ao Princípio da conservação de energia. Por esse princípio sabemos que ao longo da trajetória a energia mecânica da partícula é constante, isto é,

$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}}$$

No ponto inicial A a energia cinética da partícula é nula - ela parte do repouso - e a energia potencial gravitacional vale $mgy(x)$ - seu peso vezes a altura em que ela se encontra - de

forma que podemos escrever a energia mecânica inicial como:

$$E_{mecânica(inicial)} = mgy(x)$$

Por outro lado ao atingir o ponto mais baixo da curva, a energia potencial gravitacional da partícula é nula e sua energia cinética é máxima e vale $\frac{1}{2}mv^2$. Assim sua energia mecânica vale:

$$E_{mecânica(final)} = \frac{1}{2}mv^2$$

Pelo Princípio de conservação da energia mecânica, podemos igualar essas duas últimas expressões:

$$mgy(x) = \frac{1}{2}mv^2$$

sendo v a velocidade da partícula no ponto mais baixo da curva e $P(x(\theta), y(\theta))$ um ponto genérico da curva de parâmetro θ , com $\theta \in [\theta_a, \pi]$ e $h = y(\theta) - y(\theta_a)$.

Portanto,

$$v^2 = \frac{2mgh}{m} = 2gh,$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gh} = \\ &= \sqrt{2g(y(\theta) - y(\theta_a))} = \\ &= \sqrt{2g(r - r \cos \theta - r + r \cos \theta_a)} = \\ &= \sqrt{2gr(\cos \theta_a - \cos \theta)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sabemos que

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \implies \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \implies \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1,$$

utilizando essa relação em (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gr(2 \cos^2 \frac{\theta_a}{2} - 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 1)} = \\ &= \sqrt{4gr(\cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})} = \\ &= 2\sqrt{gr(\cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por outro lado, sendo S a função comprimento do arco percorrido pela partícula do ponto A para o ponto mais baixo da curva, então $v = \frac{dS}{dt}$. Vamos procurar agora a expressão que define dS . Já vimos que

$$S = 2r \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta,$$

daí, temos:

$$\frac{dS}{d\theta} = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \iff dS = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.7)$$

De $v = \frac{dS}{dt}$ vem que $dt = \frac{dS}{v}$, então de (2.6) e (2.7) segue que

$$dt = \frac{2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta}{2\sqrt{gr(\cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (2.8)$$

Integrando ambos os membros de (2.8), teremos:

$$\begin{aligned} t &= \int_{\theta_a}^{\pi} \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\sqrt{(\cos^2 \frac{\theta_a}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2})}} d\theta = \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_a}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta_a}{2}}}} d\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Agora, faremos a seguinte mudança de variável em (2.9),

$$\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2}} = u \implies \frac{-\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2}} d\theta = du \implies \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = -2 \cos \frac{\theta_a}{2} du. \quad (2.10)$$

Note que:

$$\theta = \theta_a \implies u = 1 \text{ e } \theta = \pi \implies u = 0$$

Substituindo (2.10) em (2.9), temos:

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_1^0 \frac{-2 \cos \frac{\theta_a}{2}}{\cos \frac{\theta_a}{2} \sqrt{1-u^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} [\arcsin u]_0^1 = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \\
 &= \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que o tempo que a partícula demora a deslocar-se do ponto A para o ponto mínimo da curva, com $\theta_a \in [0, \frac{\pi}{2}]$, é constante, não dependendo do seu ponto de partida.

Mostrando assim que a cicloide é Tautócrona. \square

2.0.3 James Watt, a Revolução industrial e além

Os trabalhos de Huygens foram adaptados para criar um mecanismo de regulação da velocidade dos moinhos de vento por meio de um sistema mecânico de bolas que giravam em torno de um eixo e cuja velocidade de rotação era proporcional à velocidade das pás dos moinhos. O objetivo era o de manter a velocidade de rotação aproximadamente constante.

James Watt (1736 - 1819), matemático e engenheiro, adaptou o princípio descrito acima à máquina a vapor e isso representou um enorme passo durante a Revolução Industrial. Tal adaptação permitiu regular a pressão no interior da caldeira e fazer com que as máquinas a vapor pudessem manter uma velocidade aproximadamente constante.

Após a revolução industrial, as ideias do que hoje se denomina como teoria do controle foram ganhando força. Nos anos 20, muitas empresas passaram a adotar o processamento contínuo em suas linhas de produção e, quando possível, utilizavam dispositivos de controle semi-automático ou automático. Deste modo a teoria do controle, mais especificamente a engenharia de controle, germinou e foi começando a ser reconhecida como uma disciplina. Durante a década de 1930, foram feitos progressos importantes no que se refere ao controle automático: amplificadores em sistemas de telefonia, sistemas de distri-

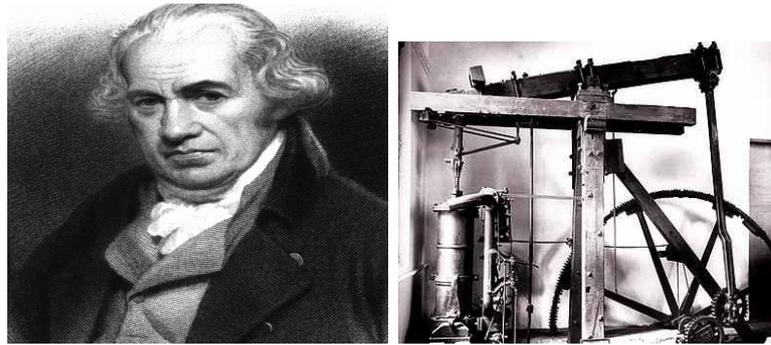


Figura 2.6: James Watt e Máquina a Vapor

buição em instalações elétricas, estabilização de aviões, dispositivos de fiação elétrica para a indústria de papel, química, petróleo e aço, etc. No final dos anos 30, já se desenvolviam outros modos de abordar os problemas de controle. Um destes consistia na utilização do que se havia desenvolvido nos séculos XVIII e XIX sobre equações diferenciais. Outro modo, baseado em análise frequencial, seria impensável sem a utilização das técnicas desenvolvidas pelo francês Joseph Fourier. Avançando um pouco no tempo, percebe-se que durante a Segunda Guerra Mundial (1939 a 1945), essas técnicas de controle foram sendo aperfeiçoados por engenheiros e cientistas no que se diz respeito a rastreamento de aeronaves, mecanismo de controle e projetos de mísseis antiaéreos. Importante ressaltar o primeiro computador criado na história durante este período, o ENIAC. Apareceram também máquinas complexas com capacidade de memória e processamento de dados. A introdução destes nos controladores permitiu sofisticá-los e torná-los inteligentes.

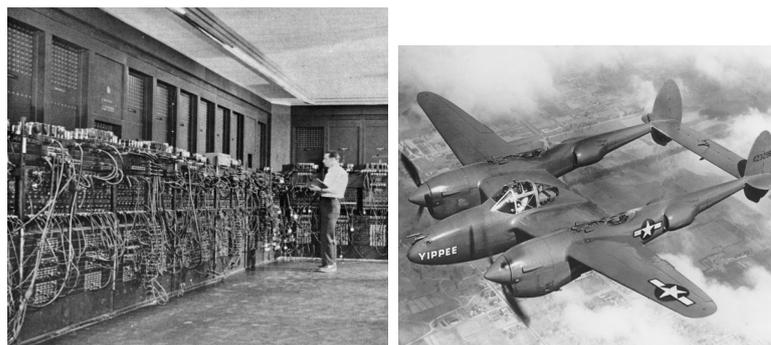


Figura 2.7: Computador ENIAC e Avião da Segunda Guerra Mundial

Após a Segunda Guerra nota-se que a teoria do controle se distingue de duas formas: uma do ponto de vista da engenharia e outra caracterizada por uma abordagem mais matemática. A partir de 1960 a teoria até então desenvolvida, conhecida como teoria do controle “clássica”, deu espaço a uma nova frente que acreditava que os métodos utilizados eram inadequados para representar a complexidade do mundo real. O avanço

na teoria do controle está intimamente relacionado com o avanço da teoria matemática e com o avanço tecnológico necessário para implementar novas e eficientes técnicas.

Algumas aplicações modernas importantes da teoria do controle são facilmente observadas. Um exemplo são os sistemas de calefação, ventilação e ar condicionado nos grandes edifícios. O objetivo desses sistemas em um prédio é manter o ambiente confortável em seu interior e uma boa qualidade do ar para seus ocupantes, com um custo operacional baixo. São nos ambientes industriais que a teoria do controle se faz presente de maneira decisiva. Na indústria automobilística por exemplo, podemos destacar o objetivo de otimizar o consumo dos combustíveis proporcionando maior rendimento e de modo que os veículos sejam fáceis de dirigir, além da segurança. Uma enorme diferença entre os carros atuais e os carros antigos reside nos mecanismos digitais de controle que facilitam a direção.

Cabe perguntar se a teoria do controle, com um passado tão rico, e que conta com uma diversidade de resultados relevantes, está encerrada ou concluída. A resposta para esta pergunta é obviamente negativa. São muitos os desafios enfrentados na fronteira do conhecimento desse ramo da matemática. Seguem alguns exemplos.

Grandes Estruturas Espaciais

A Cada dia ficam mais frequente as viagens espaciais. Os altos custos envolvidos e a pequena margem para qualquer tipo de erro, oferecem obstáculos enormes para os profissionais da área.

As atuais sondas espaciais enviadas a Marte explicitam bem o que vem a ser Teoria de Controle. Equipamento que exigem um grande acerto de estabilização em sua estrutura de modo que a mesma permaneça orientada, na direção certa e sem se deformar excessivamente, algo extremamente complexo. A elaboração de mecanismos de controle robustos para esse tipo de estrutura é um desafio do mundo moderno para o qual o desenvolvimento matemático torna-se particularmente importante. Apesar dos significativos progressos que ocorreram neste século, ainda há muito a ser feito para resolver esses sistemas complexos.

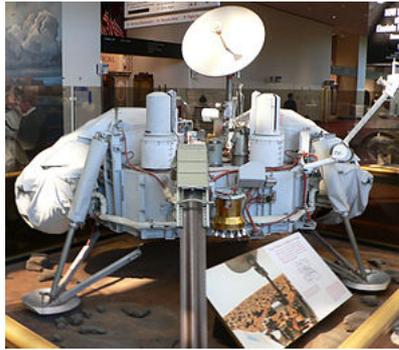


Figura 2.8: Sonda Viking enviada à Marte pela NASA

Robótica

A Robótica talvez seja a área que mais emprega a Teoria de Controle. Não é difícil imaginar o quão problemático é fazer com que um robô se movimente com uma dinâmica estável ou simplesmente fazer com que ele pegue um objeto com suas “mãos”. Seu funcionamento depende indispensavelmente de robustos algoritmos computacionais.

Controle de Fluidos

A interação entre a Teoria de Controle e a Mecânica de Fluidos é muito rica hoje em dia. É um tópico importante na Aeronáutica contemporânea, uma vez que a dinâmânica da estrutura de um avião em vôo interage com o fluxo de ar em seu ambiente. Em aviões convencionais, esse fato pode ser ignorado, mas para as novas gerações de aviões será preciso incorporar um controle em seu sistema aerodinâmico para evitar o aparecimento de turbulência em torno de suas asas. O desafio que se impõe está tanto na parte da modelagem matemática quanto na implementação dos aspectos computacionais.



Figura 2.9: Turbulência em aeronaves modernas

3 Equações Diferenciais

Equações Diferenciais são de grande importância na área da Matemática. Tais equações aparecem ainda em diversas áreas das ciências exatas, com foco maior em Física, Engenharia e Biologia. Elas são muito utilizadas para modelar problemas do cotidiano, sendo muitas das vezes a tradução matemática de uma determinada situação. Segundo Boyce e DiPrima [1], muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Quando expressas em linguagem matemática, essas relações são equações envolvendo funções e suas derivadas.

Sabe-se que Equações Diferenciais podem ser divididas em dois grandes grupos, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as Equações Diferenciais Parciais (EDP). De um modo geral as equações diferenciais, quando acompanhadas de condições iniciais e de contorno, constituem um Modelo Matemático que descreve algum tipo de fenômeno. Geralmente fenômenos mais simples são modelados por meio de EDO e aqueles mais complexos, comumente envolvendo várias variáveis, são governados por EDP. Nosso foco aqui recairá sobre as EDO, mais especificamente sobre aquelas denominadas de segunda ordem e com coeficientes constantes. É uma equação desse tipo que será responsável por descrever o fenômeno que será exposto no próximo Capítulo.

3.1 Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem

Considere a seguinte equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem, linear, com coeficientes constantes e homogênea.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (3.1)$$

em que a_1, a_0 são constantes.

Procuramos soluções exponenciais da forma $y(t) = e^{rt}$, onde r é um parâmetro

a ser determinado. Logo, $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$. Substituindo essa informação na equação acima, temos que

$$r^2e^{rt} + re^{rt}a_1 + e^{rt} = 0.$$

Colocando em evidência o fator e^{rt} , obtém-se

$$(r^2 + a_1r + a_0)e^{rt} = 0,$$

como e^{rt} é sempre diferente de zero, para que a igualdade acima ocorra, deve-se ter necessariamente que

$$r^2 + a_1r + a_0 = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) é chamada **equação característica** da EDO (3.1). Vamos agora analisar os possíveis casos das raízes desta equação característica.

A solução de (3.2) é da forma:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

em que Δ representa o discriminante da equação.

Têm-se três casos possíveis para Δ . Cada um deles será analisado a seguir.

- $\Delta > 0$

Neste caso a equação terá duas raízes reais e distintas, ou seja, existirão r_1, r_2 com $r_1 \neq r_2$. Como $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são linearmente independentes, a solução geral da EDO (3.1) para este caso será dada por

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t},$$

em que c_1 e c_2 são constantes

- $\Delta = 0$

Neste caso a equação tem uma única raiz, ou seja, têm-se $r_1 = r_2 = r$ com $r = -\frac{a_1}{2}$ e a solução geral para a EDO será

$$y(t) = c_1te^{rt} + c_2e^{rt}.$$

- $\Delta < 0$

Então, a equação tem duas raízes complexas, ou seja, teremos $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$. Logo, formalmente, tentaremos encontrar uma solução geral da forma:

$$y(t) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \Rightarrow e^{\alpha t} (c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}).$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

obtém-se

$$e^{r_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$$e^{r_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

Das equações acima segue-se que

$$\frac{e^{r_1 t} + e^{r_2 t}}{2} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{e} \quad \frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2i} = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Sejam $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. Têm-se que y_1 e y_2 são Linearmente Independentes, uma vez que seu Wronskiano é diferente de zero, e, portanto a solução geral da EDO é dada por:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

4 Controle do Pêndulo

Por meio de um problema relacionado com a dinâmica de um pêndulo iremos apresentar os principais ingredientes da Teoria Matemática do Controle

A questão que será investigada surge em várias aplicações tecnológicas, principalmente na área da Robótica, em que o objetivo é controlar um braço giratório com um motor acoplado no seu extremo. O controle de tal estrutura é realizado em analogia com o que será feito para o pêndulo.

Considera-se um pêndulo com uma massa m presa ao final da haste. Assume-se que o atrito é insignificante e que toda massa está concentrada no final desta haste. Um pêndulo convencional e ideal consiste de uma partícula suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível. Quando afastado de sua posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscilará em um plano vertical sob a ação da gravidade, o movimento é periódico e oscilatório. A figura abaixo representa a situação descrita.

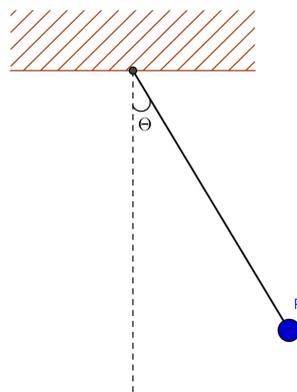


Figura 4.1: Pêndulo.

Decompondo em suas componentes a força peso obtemos

$$P_x = P \cdot \text{sen}\theta \quad \text{e} \quad P_y = P \cdot \text{cos}\theta.$$

Imaginemos um sistema de eixos coordenados cuja origem está na massa, o eixo vertical coincide com a haste e o eixo horizontal está na direção de P_x . Introduzimos uma força v que atua sobre a extremidade do pêndulo.

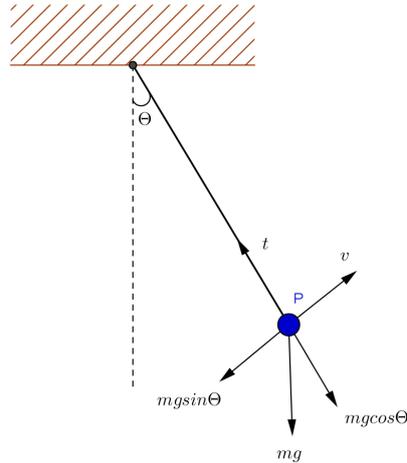


Figura 4.2: Força v atuando sobre o Pêndulo.

Da segunda lei de Newton sabemos que o somatório das forças atuantes em um sistema de massa m é o produto da massa vezes a aceleração. Nota-se que no eixo vertical a tração anula a componente P_y , de fato não há movimento do sistema nessa direção. Portanto,

$$\sum F_y = 0$$

$$T - P_y = 0$$

$$T - P \cdot \cos\theta = 0,$$

em que T representa a tensão na haste. Em relação ao eixo horizontal temos a seguinte decomposição

$$\sum F_x = m \cdot a$$

$$v - P_x = m \cdot a$$

$$v - P \cdot \sin\theta = m \cdot a$$

Nosso objetivo consiste em fazer com que o pêndulo seja movimentado para onde quisermos, para isso, é preciso aplicar uma força v contrária ao movimento natural que o pêndulo faz.

A força v nada mais é do que o controle aplicado para que possamos controlar o pêndulo. Ela surge a partir de um mecanismo externo que faz com que o pêndulo se mova para onde desejarmos.

Esta força tem que ser maior do que a força gravitacional que está puxando o pêndulo para seu movimento natural. Da análise da decomposição das forças feita acima

sabe-se que o movimento do sistema é descrito pela equação

$$v - mg \cdot \text{sen}\theta = m \cdot a. \quad (4.1)$$

Nota-se que a posição do pêndulo em cada instante de tempo é definida pelo ângulo $\theta = \theta(t)$ que o mesmo faz com a vertical e portanto a velocidade de deslocamento do pêndulo é dada, a cada instante, por $\theta'(t)$. Dizemos que o estado do sistema é dado por $(\theta(t), \theta'(t))$ a cada instante de tempo. A aceleração é dada então por $\theta''(t)$ e portanto, da equação em (4.1) vem que

$$m \cdot \theta''(t) = -mg \text{sen}\theta(t) + v(t) \quad (4.2)$$

Afim de simplificar nossa análise iremos assumir, sem perda de generalidade, que a massa m e a gravidade g sejam iguais a 1. Dessa forma a equação (4.2) assume a forma

$$\theta''(t) + \text{sen}\theta(t) = v(t), \quad (4.3)$$

que é a equação diferencial que governa o movimento. Vamos considerar que o pêndulo se encontra em uma posição que chamaremos de posição de equilíbrio instável, isto é, $(\theta, \theta') = (\pi, 0)$. Veja a figura a seguir. Logicamente a haste que segura o pêndulo não

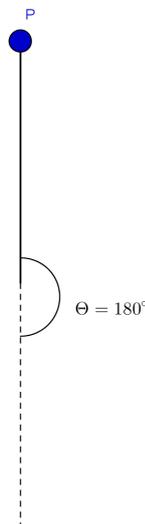


Figura 4.3: Equilíbrio instável.

é um barbante ou algum material menos resistente. Lembremos que estamos analisando algo como um braço mecânico controlando a ação da força $v(t)$.

É claro que nessa posição instável o pêndulo tenderá a pender para um lado ou para o outro. O que precisamos fazer é compensar essa situação. Observa-se que para

valores de θ próximos de π , $\text{sen}\theta$ pode ser aproximado por $\pi - \theta$ o que faz com que a equação em (4.3) seja escrita como

$$\theta''(t) + \pi - \theta = v(t). \quad (4.4)$$

Chamando $\varphi = \theta - \pi$ têm-se que $\varphi'' = \theta''$ e a equação (4.4), reescrita em função de φ fica

$$\varphi'' - \varphi = v(t). \quad (4.5)$$

Antes, nós tínhamos o estado (θ, θ') . Agora com a mudança de variável, o objetivo consiste em conduzir (φ, φ') para o estado de equilíbrio $(0, 0)$ para todos os dados iniciais pequenos.



Figura 4.4: Equilíbrio instável.

Nas figuras (4.4) e (4.5) vemos o pêndulo pendendo para a direita ou para a esquerda. Quando o sistema estiver à esquerda da linha vertical, isto é, quando $\varphi = \theta - \pi > 0$, precisamos empurrar o sistema para o lado direito, por meio de uma força $v < 0$. De modo análogo, caso o sistema ficar à direita, ou seja, $\varphi = \theta - \pi < 0$, naturalmente escolhemos $v > 0$. Tal comportamento nos sugere a seguinte Lei de Feedback, em que o controle é proporcional ao estado



Figura 4.5: Equilíbrio instável.

$$v = -\alpha\varphi, \quad (4.6)$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

Substituindo (4.6) em (4.5) vem que

$$\varphi'' - \varphi = -\alpha\varphi,$$

ou seja,

$$\varphi'' + \varphi(\alpha - 1) = 0, \quad \alpha > 0. \quad (4.7)$$

A equação (4.7) é uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes e homogênea. Isto é, do tipo daquelas que estudamos no Capítulo anterior. A equação característica associada à (4.7) é

$$r^2 + (\alpha - 1) = 0,$$

cujas raízes serão

$$r = \pm\sqrt{1 - \alpha}.$$

Sendo o discriminante da equação característica igual a $1 - \alpha$, precisamos analisar as três situações possíveis. $1 - \alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$ e $1 - \alpha < 0$.

Caso 1: $1 - \alpha = 0$

Nesta situação temos uma única raiz $r = 0$. Assim, conforme estudado no Capítulo 3 a solução da equação é dada por

$$\varphi(t) = c_1 t + c_2$$

Como $\varphi'(0) = 0$, uma vez que no instante inicial o sistema está parado, então $c_1 = 0$ donde concluímos que φ é constante.

Caso 2: $1 - \alpha > 0$

Nesse caso $\alpha < 1$. Temos então duas raízes reais e distintas e a solução será

$$\varphi(t) = c_1 e^{\sqrt{1-\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{1-\alpha}t} \quad (4.8)$$

Notamos que se considerarmos o limite na solução dada por (4.8), com t tendendo a $\pm\infty$, temos o seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = c_1 e^{\sqrt{1-\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{1-\alpha}t} = \pm\infty.$$

Ou seja, a solução cresce ou decresce indefinidamente.

Caso 3: $1 - \alpha < 0$

Agora $\alpha > 1$. Neste caso, as raízes são complexas do tipo $r = \pm i\sqrt{\alpha - 1}$. A solução da equação será dada por

$$\varphi(t) = c_1 \cos \sqrt{\alpha - 1}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha - 1}t \quad (4.9)$$

Este caso é o mais apropriado para o nosso problema inicial uma vez que o movimento é do tipo oscilatório.

A partir da análise realizada estabelecemos a seguinte estratégia:

- Manteremos o caso $\alpha > 1$;
- Vamos introduzir um termo adicional com o objetivo de diminuir as oscilações e penalizar a velocidade.

Com essa nova estratégia consideramos a seguinte nova Lei de Feedback

$$v = -\alpha\varphi - \beta\varphi', \quad \alpha > 1, \beta > 0.$$

Substituindo essa nova Lei de Feedback em (4.5), temos que:

$$\varphi'' + \beta\varphi' + (\alpha - 1)\varphi = 0, \quad \alpha > 1, \beta > 0.$$

Com isso, temos uma nova Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem, com coeficientes constantes e homogênea. A equação característica associada a ela é:

$$r^2 + \beta r + (\alpha - 1) = 0,$$

e suas raízes são dadas por:

$$r = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}$$

Vamos analisar o discriminante da equação característica acima, isto é, $\beta^2 - 4(\alpha - 1)$.

Se $\beta^2 - 4(\alpha - 1) < 0$ então, pelo que foi visto no Capítulo 3, a solução $\varphi(t)$ será dada por

$$\varphi(t) = c_1 e^{-(\beta/2)t} \cos\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}t\right) + c_2 e^{-(\beta/2)t} \sin\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}t\right),$$

e como podemos perceber, o fato de que a parte real das raízes é negativa faz com que a solução vá para zero a medida em que t cresce.

Se $\beta^2 - 4(\alpha - 1) > 0$ então

$$\varphi(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

em que

$$r_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(\alpha - 1)}}{2}.$$

Nessa situação percebemos que a solução tende para zero monotonicamente, isto é, sem oscilações. Para isso basta notar que ambos, r_1 e r_2 são negativos.

Se $\beta^2 - 4(\alpha - 1) = 0$ têm-se que

$$\varphi(t) = c_1 t e^{-(\beta/2)t} + c_2 e^{-(\beta/2)t},$$

e novamente as soluções vão para zero quando t vai para o infinito.

Este modelo simples é rico o suficiente para ilustrar algumas propriedades sistemáticas da Teoria de Controle conforme destacamos abaixo:

- Linearizar o sistema é uma ferramenta útil para alcançar a controlabilidade do mesmo. No entanto os resultados obtidos desta forma são apenas de natureza local;

- Podemos propor controles por Feedback, mas seus efeitos sobre o sistema podem não ir de encontro com o desejado;
- O aumento da dissipação pode eliminar as oscilações.

O leitor curioso poderá encontrar na referência [3] a continuação da apresentação introdutório sobre esse assunto, inclusive com os aspectos relacionados com Controle de Sistemas governados por EDPs.

5 Conclusão

Tal proposta de projeto para o desenvolvimento do meu trabalho de conclusão de curso se mostrou uma oportunidade de, além de ter contato com uma importante área de pesquisa, com fortes aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, consolidar e aprofundar conhecimentos de Cálculo, Análise Matemática, Física e Equações Diferenciais, que foram estudados ao longo da minha formação. O trabalho serve ainda para ilustrar que apenas com ferramentas elementares da matemática, é possível abordar e resolver importantes problemas práticos.

Referências Bibliográficas

- [1] Boyce, William E. e DiPrima, Richard C., Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] Burrowes, M. e Farina, C., Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 2, p. 175-179, 2005.
- [3] Zuazua, E., Las Matemáticas del Control: Historia y desarrollo recientes en Matemáticas, MEC, Aulas de Verano, Instituto Superior de Formación de Profesorado, 245-316, 2004.