

Introdução à Lógica Computacional ILC 2019.2

Aula: Lógica de Predicados

Mestrando: Daniel da Silva Costa

Professora: Dra. Ana Cristina Bicharra Garcia

UNIRIO



Como formalizar este argumento em Lógica Proposicional?

Sócrates é homem.

Todo homem é mortal.

Logo, Sócrates é mortal.

Como formalizar este argumento em Lógica Proposicional?

P: Sócrates é homem.

*Q: **Todo** homem é mortal.*

R: Logo, Sócrates é mortal.

Lógica de Predicados [Rosen]

- É uma lógica mais poderosa que a Lógica Proposicional.
- Permite explorar relações entre objetos.
- Propriedades que valem para objetos de um certo tipo.
- Declarações sobre a existência de um objeto com uma propriedade específica.

Lógica de Predicados [Wikipedia]

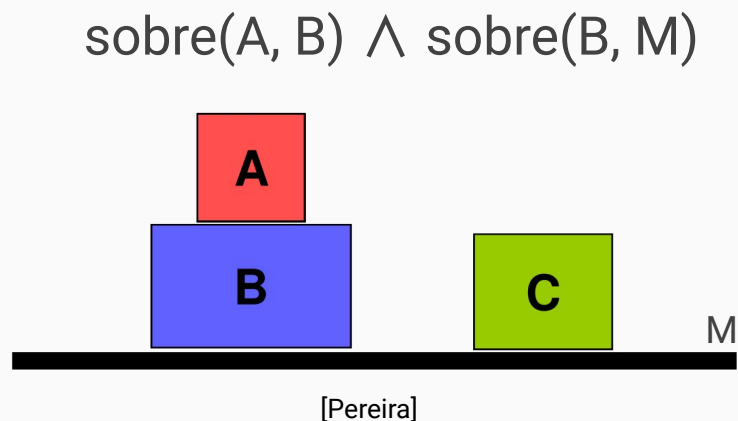
- Pode formalizar toda a matemática clássica.
- **Lógica de Primeira Ordem** ou **Cálculo de Predicados**
- “Uma teoria de primeira ordem consiste em um conjunto de **axiomas** e de **sentenças dedutíveis** a partir deles.”
- “Um **axioma** é uma hipótese inicial de qual outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma sentença, uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal.”

Sintaxe

- Conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$)
- Objetos
- Predicados
- Variáveis
- Quantificadores

Objetos

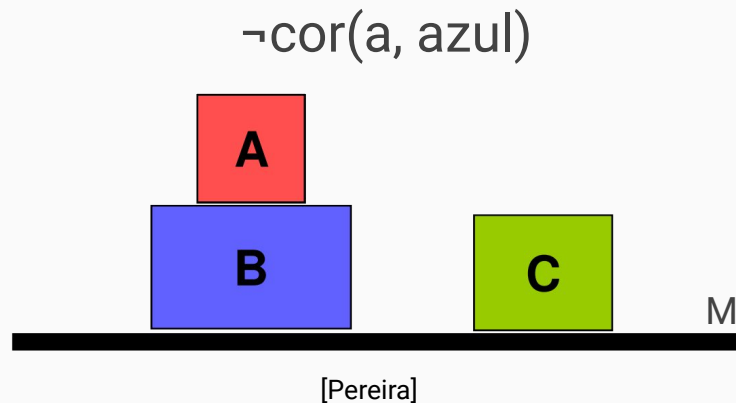
- Na lógica de predicados, a noção de objeto é usada num sentido bastante amplo.
- Objetos podem ser
 - Concretos
 - Ex: livro, a lua
 - Abstratos
 - Ex: um conjunto vazio, a paz
 - Fictícios
 - Ex: unicórnio, Saci Pererê



Predicados

- Exemplos

- $x > 5$
- $x = y + 2$
- $x + z = y$
- *Computador x foi atacado por um hacker*
- *Computador x está quebrado.*



Variáveis

- Declarações que **não são nem verdadeiras e nem falsas, exceto quando um valor é atribuído.**
- Encontradas na Matemática e em programas de computador.

Ex: $x > 5$

x : Variável

> 5 : Predicado

$P(x)$: $P = \text{"é maior que 5"} = \textbf{Função Proposicional } P \text{ em } x$

Exemplo 1

- Seja $P(x)$ a declaração “ $x > 5$ ”. Qual o valor-verdade de $P(7)$ e $P(3)$?

$$P(7) = ?$$

$$P(3) = ?$$

Exemplo 1 (Solução)

- Seja $P(x)$ a declaração “ $x > 5$ ”. Qual o valor-verdade de $P(7)$ e $P(3)$?

$$P(7) = \mathbf{V}$$

$$P(3) = \mathbf{F}$$

Exemplo 2

[Rosen] Seja $A(x)$ a declaração “O computador x está sendo invadido por um hacker”. Suponha que dois computadores do campus apenas o CS2 e o MATH1 estão sendo invadidos por algum hacker.

Quais valores-verdade de $A(\text{CS1})$, $A(\text{CS2})$ e $A(\text{MATH1})$?

$A(\text{CS1}) = ?$ $A(\text{CS2}) = ?$ $A(\text{MATH1}) = ?$

Exemplo 2 (Solução)

[Rosen] Seja $A(x)$ a declaração “O computador x está sendo invadido por um hacker”. Suponha que dois computadores do campus apenas o CS2 e o MATH1 estão sendo invadidos por algum hacker.

Quais valores-verdade de $A(\text{CS1})$, $A(\text{CS2})$ e $A(\text{MATH1})$?

$$A(\text{CS1}) = \mathbf{F} \quad A(\text{CS2}) = \mathbf{V} \quad A(\text{MATH1}) = \mathbf{V}$$

Exemplo 3

[Rosen] Seja $Q(x, y)$ a representação de “ $x = y + 3$ ”. Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

$$Q(1, 2) = ?$$

$$Q(3, 0) = ?$$

Exemplo 3 (Solução)

[Rosen] Seja $Q(x, y)$ a representação de “ $x = y + 3$ ”. Quais os valores-verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

$$Q(1, 2) = “1 = 2 + 3” = \mathbf{F}$$

$$Q(3, 0) = “3 = 0 + 3” = \mathbf{V}$$

De forma geral: $\mathbf{P}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, lê-se: Função Proposicional P para n -úpla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e P é chamado de predicado n -ário.

Quantificação [1/3]

- *Um predicado é verdadeiro para um **conjunto** de elementos.*
- Quantificadores
 - **Universal ($\forall$)**
 - “todos”, “para cada”, “dados qualquer” (Língua Portuguesa)
 - **Existencial ($\exists$)**
 - “para algum”, “para pelo menos um”, “há” (Língua Portuguesa)
- [Wikipedia] “O **domínio de discurso**, também chamado de **universo de discurso** ou **domínio de quantificação**, é uma ferramenta analítica usada na lógica dedutiva, especialmente na lógica de predicados. Indica o **conjunto relevante de entidades às quais os quantificadores se referem.**”

Quantificação [2/3]

- $\forall (x)P(x)$

- Válido para todo elemento pertencente ao domínio.
- Lê-se: “para todo x , P de x ”
- Exemplo: ***Todo refrigerante tem gás.***

- $\forall (x)G(x)$

- Contra-exemplo: encontrar um x que torne falso $\forall (x)G(x)$

Quantificação [3/3]

- $\exists (x)P(x)$

- Válido para pelo menos um elemento do domínio.
- Lê-se: “existe x, P de x”
- Exemplo: ***Existe refrigerante de laranja.***
 - $\exists (x)L(x)$
- Contra-exemplo: não encontrar x para o qual P(x) seja verdadeiro.

Sentença	Quando é verdadeira?	Quando é falsa? (contra-exemplo)
$\forall (x)P(x)$	P(x) é verdadeira para todo x.	Existe um x tal que P(x) é falsa.
$\exists (x)P(x)$	Existe um x tal que P(x) é verdadeira.	P(x) é falsa para todo x.

Exemplo 4

Seja $Q(x)$ a declaração “ $x < 5$ ”. Qual o valor-verdade da quantificação $\forall (x)Q(x)$, em que o domínio consiste em todos os números reais?

$$\forall (x)Q(x), x \in \mathbb{R} = ?$$

Exemplo 4 (Solução)

Seja $Q(x)$ a declaração “ $x < 5$ ”. Qual o valor-verdade da quantificação $\forall (x)Q(x)$, em que o domínio consiste em todos os números reais?

$$\forall (x)Q(x), x \in \mathbb{R} = \mathbf{F}$$

Por exemplo, se $x = 9$, então:

$Q(9) = “9 < 5”$, logo:

$\forall (x)Q(x)$ é falso, pois “ $x = 9$ ” é um contra-exemplo.

Exemplo 5

Seja $P(x)$ a expressão “ $x > 5$ ”. Qual o valor-verdade da quantificação $\exists (x)P(x)$ no domínio dos números reais?

$$\exists (x)P(x), x \in \mathbb{R} = ?$$

Exemplo 5 (Solução)

Seja $P(x)$ a expressão “ $x > 5$ ”. Qual o valor-verdade da quantificação $\exists (x)P(x)$ no domínio dos números reais?

$$\exists (x)P(x), x \in \mathbb{R} = \mathbf{V}$$

Por exemplo, se $x \in (5, +\infty)$.

Tradução

- *Toda cobra é venenosa*
 $\forall x[\text{cobra}(x) \rightarrow \text{venenosa}(x)]$
- *Nenhuma bruxa é bela*
 $\forall x[\text{bruxa}(x) \rightarrow \neg \text{bela}(x)]$
- *Algumas pedras são preciosas*
 $\exists x[\text{pedra}(x) \wedge \text{preciosa}(x)]$
- *Alguns políticos são honestos*
 $\exists x[\text{politico}(x) \wedge \text{honesto}(x)]$

E se o domínio for vazio?

$$\forall (x)P(x) = ?$$

$$\exists (x)P(x) = ?$$

E se o domínio for vazio? (Solução)

$$\forall (x)P(x) = \mathbf{V}$$

$$\exists (x)P(x) = \mathbf{F}$$

Semântica da lógica de predicados

Para $D = \{a, b, c\}$

Quantificador **Universal** $\Leftrightarrow$ **Conjunção**

$$\forall (x)[\text{colorido}(x)] \Leftrightarrow \text{colorido}(a) \wedge \text{colorido}(b) \wedge \text{colorido}(c)$$

Quantificador **Existencial** $\Leftrightarrow$ **Disjunção**

$$\exists (x)[\text{cor}(x, \text{azul})] \Leftrightarrow \text{colorido}(a) \vee \text{colorido}(b) \vee \text{colorido}(c)$$

Precedência

$$\forall (x)P(x) \vee Q(x)$$

$$(\forall (x)P(x)) \vee (Q(x)) \text{ [ou?]} \forall (x)(P(x) \vee Q(x))$$

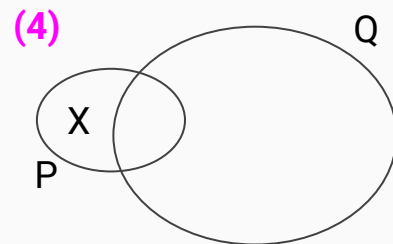
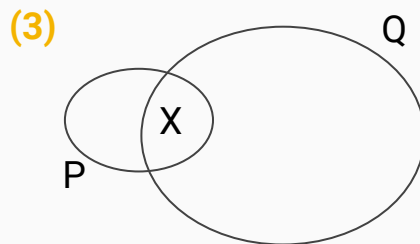
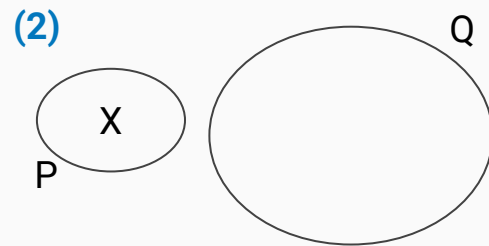
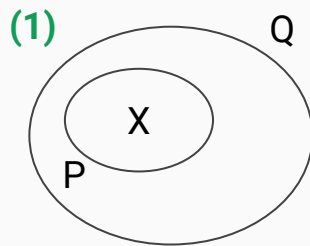
Precedência (Solução)

$$\forall (x)P(x) \vee Q(x)$$

$$(\forall (x)P(x)) \vee (Q(x)) \text{ [ou?]} \forall (x)(P(x) \vee Q(x))$$

Enunciados Categóricos

- **(1) Universal afirmativo**
 - $\forall (x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$
- **(2) Universal negativo**
 - $\forall (x)[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
- **(3) Particular afirmativo**
 - $\exists (x)[P(x) \wedge Q(x)]$
- **(4) Particular negativo**
 - $\exists (x)[P(x) \wedge \neg Q(x)]$



Equivalência entre sentenças

Nem tudo que brilha é ouro

Fórmula (1)

$$\neg \forall x [\text{brilha}(x) \rightarrow \text{ouro}(x)]$$

III

Fórmula (2)

$$\exists x [\text{brilha}(x) \wedge \neg \text{ouro}(x)]$$

Equivalência entre sentenças (Solução)

Nem tudo que brilha é ouro

Fórmula (1)

$$\neg \forall x [\text{brilha}(x) \rightarrow \text{ouro}(x)]$$

III

Fórmula (2)

$$\exists x [\text{brilha}(x) \wedge \neg \text{ouro}(x)]$$

(1) $\equiv$ (2)

$$\begin{aligned} & \neg \forall x [\text{brilha}(x) \rightarrow \text{ouro}(x)] \\ & \equiv \neg \forall x [\neg \text{brilha}(x) \vee \text{ouro}(x)] \\ & \equiv \exists x \neg [\neg \text{brilha}(x) \vee \text{ouro}(x)] \\ & \equiv \exists x [\text{brilha}(x) \wedge \neg \text{ouro}(x)] \end{aligned}$$

Validade

Argumento

$\{ \text{homem}(\text{socrates}) , \forall x[\text{homem}(x) \rightarrow \text{mortal}(x)] \} \models \text{mortal}(\text{socrates})$

Normalização

$\{ \text{homem}(\text{socrates}) , \forall x[\neg \text{homem}(x) \vee \text{mortal}(x)] \} \models \text{mortal}(\text{socrates})$

x = socrates

(1) $\text{homem}(\text{socrates})$

(2) $\neg \text{homem}(\text{socrates}) \vee \text{mortal}(\text{socrates})$

(3) $\text{mortal}(\text{socrates})$

Skolemização [Pereira]

“Todo cão é fiel a alguém”

Fórmula: $\forall x[\text{cão}(x) \rightarrow \exists y[\text{fiel}(x, y)]]$

Instância: $\forall x[\text{cão}(x) \rightarrow \text{fiel}(x, \text{dono}(x))] / \{y = \text{dono}(x)\}$

Significado: Todo cão é fiel a seu dono.

Conclusão: a fórmula e sua instância têm significados coerentes

Bibliografia

- [Rosen] ROSEN, K.H., Matemática Discreta e suas Aplicações, 6a ed. São Paulo, Mc Graw Hill.
- [Pereira] Lógica de Predicados (Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira)
 - PDF:
<https://www.ime.usp.br/~slago/IA-logicaDePredicados.pdf>
 - Apresentação: <https://www.ime.usp.br/~slago/ia-3.pdf>
- [Wikipedia]
 - https://pt.wikipedia.org/wiki/Lógica_de_primeira_ordem

Introdução à Lógica Computacional ILC 2019.2

Aula: Lógica de Predicados

Mestrando: Daniel da Silva Costa

Professora: Dra. Ana Cristina Bicharra Garcia

UNIRIO

