Introdução à Lógica Computacional

Forma Prenex e Skolem

Cláusulas e literais complementares

- Cláusula em lógica de predicados é uma disjunção de literais
  - Usando a notação de conjuntos:
  - $C1=\{p(x),q(x)\}$, $C2=\{\neg p(x), \neg r(x,y)\}$

- Dois literais são complementares quando um é a negação do outro

Resolvente de 2 cláusulas

- Supondo 2 cláusulas C1={A1,..., An} e C2={B1, ..., Bn}, com literais complementares
  - A, um conjunto de literais em C1, tal que
  - -A, um conjunto de literais complementares a A, estão em C2
- Resolvente de C1 e C2:
- Res(C1,C2)=(C1-A)U(C2- -A)
- Res(C1,C2) pode ser {}
  - Resolvente vazio ou trivial

Exemplos de resolventes

- Res (C1,C2) = $\{q(x),\neg r(x,y)\}$, que também é uma cláusula
- C3=$\{\neg p(a), \neg r(x,y)\}$
- Res (C1,C3) = $\{p(x),q(x),\neg p(a),\neg r(x,y)\}$
  - $p(x)$ e $\neg p(a)$ quase são complementares
  - se x fosse interpretado como a
- Res (C1,C3) = $\{q(a),\neg r(a,y)\}$
  - com x substituído por a

Casos mais complexos...

- $C4=\{r(x,y)\}$ e $C5=\{\neg r(y,f(a))\}$
- $Res(C4,C5)=?$
- Na verdade, na resolução sobre a lógica de predicados, $r(x,y)$ representa $(\forall x)(\forall y)r(x,y)$ implicitamente
    - Isso exige que as cláusulas antes de serem submetidas à resolução estejam noutro tipo de forma normal...

Forma Prenex – Informal

- Quando os quantificadores estão na frente da fórmula
  - $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \wedge p(y))$
  - Não existem outros quantificadores

- Fórmula aberta em LPO – não contém quantificadores

Forma Prenex – Formal

- Uma fórmula está na forma prenex quando é do tipo (Qx1)...(Qxn)G, onde
  - G é aberta (às vezes chamada de matriz)
  - (Qxi) é um quantificador universal ou existencial
  - (Qx1)...(Qxn) às vezes é chamado de prefixo

- $(\forall x)((\forall y)r(x,y) \wedge p(y))$ está na forma prenex?

Escopo e Prenex

- Não!!!
- Na forma prenex, o escopo dos quantificadores deve ser á fórmula inteira

- Toda fórmula tem um equivalente na forma prenex!
- Como transformá-la em Prenex então?

Regras da PRENEX

R1=(∀x)A^B

(∀x)(A^B)

R2= (∀x)AvB

(∀x)(AvB)

R3=(∃x)A^B

(∃x)(A^B)

R4=(∃x)AvB

(∃x)(AvB)

onde x não ocorre livre em B (válido até R4)

R5=(∀x)A^(∀x)B

(∀x)(A^B)

R6=(∃x)Av(∃x)B

(∃x)(AvB)

R7=(Q1x)A^(Q2y)B

(Q1x)(Q2y)(A^B)

R8=(Q1x)Av(Q2y)B

(Q1x)(Q2y)(AvB)

onde Q significa = quantificador

x não ocorre livre em B e y não ocorre livre em A

Regras prenex não-equivalentes

- $R\vee = (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$

- $R\wedge = (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

Renomeação de variáveis

- $(\forall x)A \lor (\forall x)B$ em prenex?
- Se $H=(Qx)G$, a variável x pode ser renomeada para y, $(Qy)G\{x \text{<-} y\}$
  - Se essa substituição for segura
- Ex de segura:
  - $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\exists x)q(x,y))$
  - $(\forall z)(p(z) \rightarrow (\exists x)q(x,y))$ e
  - $(\forall z)(p(z) \rightarrow (\exists w)q(w,y))$ são seguras...
- Ex de insegura:
  - $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x,y,z))$
  - $(\forall y)(\forall z)(r(y,y,z))$ $\{x \text{<-} y\}$ não é segura...

Regra prenex de renomeação de variáveis

- Se H tem os quantificadores $(Qx_1)...(Qx_n)$
- E as variáveis livres $z_1, ..., z_n$,
- x_i pode ser renomeada para y_i desde que
  - $y_i <> y_j$ para $i<>j$ e $y_i <> x_j$ e z_j $\forall j$

Regras prenex não-equivalentes

- $R\vee = (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ diferente de $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$
- $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) = (\forall x)(A(x) \vee (\forall z)B(z))$

$= (\forall y)((\forall z)B(z) \vee A(y)) = (\forall y)(\forall z)(B(z) \vee A(y))$

- $R\wedge = (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$ diferente de $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$
- $(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) = (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y) = (\exists x)(A(x) \wedge (\exists y)B(y)) =$ $(\exists z)((\exists y)(B(y) \wedge A(z))$

  $= (\exists z)((\exists y)(B(y) \wedge A(z)))$

Algoritmos para gerar prenex (repetidamente)

- 1 -Leis de eliminação
  - $P \rightarrow Q = (\neg P v Q)$
  - $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q)\wedge(Q \rightarrow P)$
- 2 -Leis da negação
  - $\neg(\neg H) \leftrightarrow H$
  - $\neg((\exists z)(H)) = ((\forall x)\neg H)$
  - $\neg((\forall z)(H)) = ((\exists x)\neg H)$
- 2 -Leis de De Morgan
  - $\neg(PvQ) = \neg P \wedge \neg Q$
  - $\neg(P\wedge Q) = \neg P \; v \; \neg Q$
- 3 –Regra de renomeação de variáveis
- 4 –Regras Prenex

Exercício

1. $(\forall x)p(x) \wedge ((\forall x)q(x) \rightarrow (\exists y)r(x,y,z))$

- $(\forall x)p(x) \wedge (\neg(\forall x)q(x) \vee (\exists y)r(x,y,z))$
- $(\forall x)p(x) \wedge ((\exists x)\neg q(x) \vee (\exists y)r(x,y,z))$
- Renomeando:
  - $(\forall y1)p(y1) \wedge ((\exists y2)\neg q(y2) \vee (\exists y3)r(x,y3,z))$
  - $(\forall y1)p(y1) \wedge (\exists y2)(\exists y3)(\neg q(y2) \vee r(x,y3,z))$
  - $(\forall y1)(\exists y2)(p(y1) \wedge (\neg q(y2) \vee r(x,y2,z))$

Exercícios

1. $(\forall x)q(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
2. $(\forall x)(\forall y)((\exists z)(r(x,z) \hat{}\, r(y,z)) \rightarrow (\exists u)p(x,y,u))$

Forma Skolem

- Resolução é feita com fórmulas prenex SEM quantificadores existenciais
- É preciso eliminá-los!!
- G está na forma de Skolem se ela é veio de uma prenex H cujos ∃s foram retirados pelas regras de Skolem
  - Porém H NÃO equivale a G!!
  - Mas, H é insatisfatível sse G também for!

Exemplo 1 de Skolemização

- $(\exists x)p(x)$ e uma interpretação I sobre U
- $I[(\exists x)p(x)] = True \leftrightarrows \exists d \in U; <x <- d> I[H]=T$
  $\leftrightarrows \exists d \in U;\ pI(d)=T$
- Se $I[a]=d$, então $I[p(a)]=T$
- Se $I[(\exists x)p(x)]=T$, então $I[p(a)]=T$

- $I[p(x)]=T \leftrightarrows xI$ é inteligente e U=alunos do CIn
- $I[(\exists x)p(x)]=T \leftrightarrows \exists d \in$ aluno-CIn em que $I[d]$=Bio; d é inteligente
- Se trocarmos $(\exists x)p(x)]= p(a)$??

Exemplo 2 de Skolemização

- $(\forall x)(\exists y)r(y,x)$ com a mesma interpretação
  - $I[r(y,x)]=T \leftrightarrows yI$ é professor de xI
  - $I[(\forall x)(\exists y)r(y,x)]=T \leftrightarrows$ todo aluno tem ao menos um professor
- Se trocarmos para $(\forall x)r(b,x)$, onde $I[b]=Fred$??
  - $I[(\forall x)r(b,x)]=T \leftrightarrows$ Fred é professor de todos os alunos do CIn $\leftrightarrows I[(\forall x)r(b,x)]=F$
- Note que $I[(\forall x)(\exists y)r(y,x)]=T$ e $I[(\forall x)r(b,x)]=F$
- Por quê??

Função de Skolem

- Porque Fred existe no domínio
- A idéia é que b seja “um professor genérico” de x (sem ser uma variável ☺)
  - $y=f(x)$, pois y depende de x
- Trocamos $(\forall x)(\exists y)r(y,x)$ para $(\forall x)r(f(x),x)$
- $(\forall z)(\forall x)(\exists y)p(z,y,x)$ vira $(\forall z)(\forall x)p(z,g(z,x),x)$

Exemplos 3 e 4 de Skolemização

- $(\exists x)(\exists y)q(y,x)$ vira $q(a,b)$ e $a<>b$
- $I[(\exists x)(\exists y)q(y,x)]=T \leftrightarrows \exists d \in U, \exists e \in U, <y<-e> <x<- d>I[q(y,x)]=T$

- $(\exists x)(\forall w)(\exists y)p(x,w,y)$ vira $(\forall w)p(a,w,f(w))$
  - Só y é f(w)

Regras de Skolemização

Portanto:

R1=$(\forall x1)\ldots(\forall xn)(\exists y)A(x1,\ldots,xn,y)$

$(\forall x1)\ldots(\forall xn)A(x1,\ldots,xn,f(x1,\ldots,xn))$

R2=$(\exists y)(\forall x1)\ldots(\forall xn)A(x1,\ldots,xn,y)$

$(\forall x1)\ldots(\forall xn)A(x1,\ldots,xn,a)$

R2=R1 com n=0

Algoritmo de Skolemização

- Se H é prenex (Qx1)...(Qxn)G e xi<>xj quando i<>j
- Para cada quantificador existencial
  - Começando pelo mais interno
- Aplique as regras de skolemização

Exemplo de Skolemização

- $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)(\forall x1)(\exists y1)(\forall z1)\ (p(x,y,z,w,w3) \rightarrow q(x2,x1,y1,z1))$
- $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)(\forall x1)(\forall z1)\ (p(x,y,z,w,w3) \rightarrow q(x2,x1,f(x1,y,x),z1))$
- $(\forall x)(\forall y)(\forall x1)(\forall z1)\ (p(x,y,f3(y,x),f2(y,x),w3) \rightarrow q(x2,x1,f(x1,y,x),z1))$

Cláusula em LPO

- Disjunção de literais prenex fechada (ou)
- Conjunto finito de literais com os quantificadores universais implícitos
- C1={p(x),¬q(x),r(x,y)} (notação de conjuntos)

  = $(\forall x)(\forall y)(p(x) \vee \neg q(x) \vee r(x,y))$

  = $(\forall *)(p(x) \vee \neg q(x) \vee r(x,y))$

Prenex e Skolem

- Transformam H em G= $(\forall^*)E$,
  - E está em CNF ou DNF
  - Em CNF, pode transformar-se numa cláusula
- $H=(\forall x)(\forall z)((\forall y1)\ p(y1) \wedge ((\forall y2)\ q(y2) \rightarrow (\exists y3)(r(x,y3,z)))$

  em cláusula??

Prenex

- $H=(\forall x)(\forall z)\ ((\forall y1)p(y1) \wedge ((\forall y2)\ q(y2) \rightarrow (\exists y3)(r(x,y3,z)))$
- $H=(\forall x)(\forall z)\ ((\forall y1)p(y1) \wedge (\neg(\forall y2)\ q(y2) \vee (\exists y3)(r(x,y3,z)))$
- $H=(\forall x)(\forall z)\ ((\forall y1)p(y1) \wedge ((\exists y2)\neg q(y2) \vee (\exists y3)(r(x,y3,z)))$
- $G=(\forall x)(\forall z)(\forall y1)(\exists y2)(\exists y3)\ (p(y1) \wedge (\neg q(y2)\ \vee\ r(x,y3,z)))$
- $G=(\forall *)(\exists y2)(\exists y3)(p(y1) \wedge (\neg q(y2)\ \vee\ r(x,y3,z)))$

Skolem

- G=(∀*)(∃y2)(∃y3) (p(y1) ^(¬q(y2) v r(x,y3,z)))
- G=(∀*) (p(y1) ^ (¬q(g(y1,z,x)) v r(x,f(y1,z,x),z)))
- Hc={[p(y1)],[¬q(g(y1,z,x)), r(x,f(y1,z,x),z)]}
- Obviamente G e Hc são fechadas

Literais complementares

- As cláusulas {p(f(y1))} e {¬p(f(y1)),r(x,f1(y1,z,x),z)} possuem os literais complementares p(f(y1)) e ¬p(f(y1))
- As cláusulas {p(f(y1))} e {¬p(f(w)),r(x,f1(y1,z,x),z)}
- possuem literais "quase" complementares
  - p(f(y1)) e ¬p(f(w))
  - Seriam complementares se y fosse substituído por w => ver em <u>Unificação</u>