Introdução à Logica Computacional

Aula: Teoria dos Conjuntos
Inferências

Introdução à teoria dos conjuntos

- Teoria dos conjuntos:
  - Base do pensamento matemático
- **Todos** objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos

Introdução à teoria dos conjuntos

- O que os seguintes objetos têm em comum?
  - Um grupo de pessoas
  - Um rebanho de animais
  - Um buquê de flores
  - Uma dúzia de ovos
- Conjunto:
  - Coleção de objetos bem definidos, denominados elementos ou membros do conjunto
  - As palavras "conjunto" e "elementos" são termos indefinidos da teoria dos conjuntos

- Os elementos de um conjunto podem ser determinados por alguma propriedade
- Não existe ordem entre os elementos do conjunto

Conjunto dos seres humanos

Conjunto das mulheres brasileiras

Conjunto dos alunos de Informática da UNIRIO

Conjunto dos parlamentares implicados na Lava à Jato

Conjunto dos dias da semana

Conjunto dos números naturais

Conjunto dos números pares

Introdução à teoria dos conjuntos

- Conjunto:
  - Coleção de objetos bem definidos, denominados elementos ou membros do conjunto
  - As palavras “conjunto” e “elementos” são termos indefinidos da teoria dos conjuntos
- Teoria dos conjuntos:
  - Base do pensamento matemático
- **Todos** objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos

Formas de definir conjuntos

- Listar seus elementos entre chaves: FORMA EXTENSIVA
  - {Ana, Roberto, Carlos}
  - {Roberto, Carlos, Ana}
  - {Roberto, Roberto, Ana, Carlos, Ana}

- Especificar uma propriedade que define um conjunto: FORMA INTENSIVA
  $S = \{x | P(x)\}$:
  - $\{x \in Z | -2 < x < 5\}$

  lê-se: x pertence ao conjunto dos INTEIROS tal que x está entre -2 e 5, portanto {-1, 0, 1, 2, 3, 4}

- – $\{x \in R | -2 < x < 5\}$
  lê-se: x pertence ao conjunto dos REAIS tal que x está entre -2 e 5, portanto sabemos o que está dentro mas é impossível enumerar

- Usar uma definição recursiva: $\begin{cases} 1 \in A \\ \text{se } x \in A \text{ e } x + 2 < 10, \text{ então } x + 2 \in A \end{cases}$

lê-se: o numero 1 pertence ao conjunto A e todos os números do conjunto A somado a 2 que seja menor que 10. Portanto A={ 1, 3, 5, 7, 9}

Formas de definir conjuntos

- Usar operações sobre conjuntos para criar novos conjuntos:
  - – $S=\{1,3,5,7,9\} \cup P$
- Especificar uma função característica:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} k & \text{para } x = 1, 3, 5, 7, 9 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nem sempre é possível utilizar todos os elementos de um conjunto:

- Exemplo: $S=\{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$
  Não é possível definir S listando os elementos.

Conjuntos especiais

- Conjunto Vazio
  - Não possui elementos
  - Símbolo= $\varnothing$ = {}

  Obs.: $\varnothing$ é DIFERENTE de { $\varnothing$ }

  Exemplo:
  conjunto de ganhadores da megasena do dia 28/06/2017 ={}
  Ninguém ganhou

- Conjunto unitário= possui um elemento

  Exemplo=
  conjunto de ganhadores do “The Voice Brazil 2016” = { Mylena}

Tipo de conjuntos

- Enumeráveis/Não enumeráveis
  - Enumerar consiste em designar um elemento de um conjunto como sendo o primeiro elemento, s_1, um outro como sendo o segundo elemento,s_2, e assim por diante
  - Para provar que um conjunto é enumerável basta exibir um modo de enumerar todos os seus elementos
  - Ex.: números inteiros **são** enumeráveis
  - Números reais **não são** enumeráveis
- Finitos/Infinitos
  - Os conjuntos finitos são enumeráveis
  - Para um conjunto S finito com k elementos, podemos enumerar os elementos em uma determinada ordem
  - s_1, s_2, s_3, ...s_k
  - k é a cardinalidade do conjunto
- Conjunto contáveis/não contáveis
  - Conjunto contáveis são os conjuntos finitos e os conjuntos infinitos enumeráveis
  - Ser contável NAO significa que podemos determinar o numero total de elementos de um conjunto, mas que podemos determinar a posição de qualquer elemento

Relações em conjuntos

- Axioma da extensão:
  - Um conjunto é completamente determinado pelos seus elementos
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto
- Notação:
  Seja "S" um conjunto e "a" um elemento de S.

- Relações de pertinência
  - Relação entre elemento e conjunto

  - a ∈ S: a pertence a S
    Seja o conjunto das S=frutas_lá_de_casa ={maça, laranja, banana, pera, uva}
    a Maçã pertence ao conjunto das frutas, maça ∈ ao conjunto frutas_lá_de_casa

  - a ∉ S: a não pertence a S
    abacaxi ∉ ao conjunto frutas_lá_de_casa

Relação entre conjuntos

Definição: Se A e B são conjuntos, A é chamado subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$, sse cada elemento de A também é um elemento de B.

Simbolicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x,\ \text{se } x \in A \text{ então } x \in B.$$

As frases "A está contido em B" e "B contém A" são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

Relação entre conjuntos

- A= {2 4 6 8 10}
- B= {4 8}
- C={4 8}

$$B \subset A$$

$$A \supset B$$

$$B = C$$

$$B \subset C$$

$$C \subset B$$

$$2 \in A$$

$$2 \notin B$$

Operações em conjuntos

- Dado um conjunto arbitrário S, podemos definir operações no conjunto Ω(S) (denominado conjunto universo)
  - União
  - Interseção
  - Complemento
  - Diferença
  - Produto cartesiano

União

- Sejam A e B em ζ(S) , a união de A e B

Denotada por $A \cup B$

{x | x ∈ A ou x ∈ B}

Exemplo:

H= conjunto dos homens

M= conjunto das mulheres

$$H \cup M = humanos$$

Interseção

- Sejam A e B em ζ(S) , a interseção de A e B

Denotada por $A \cap B$

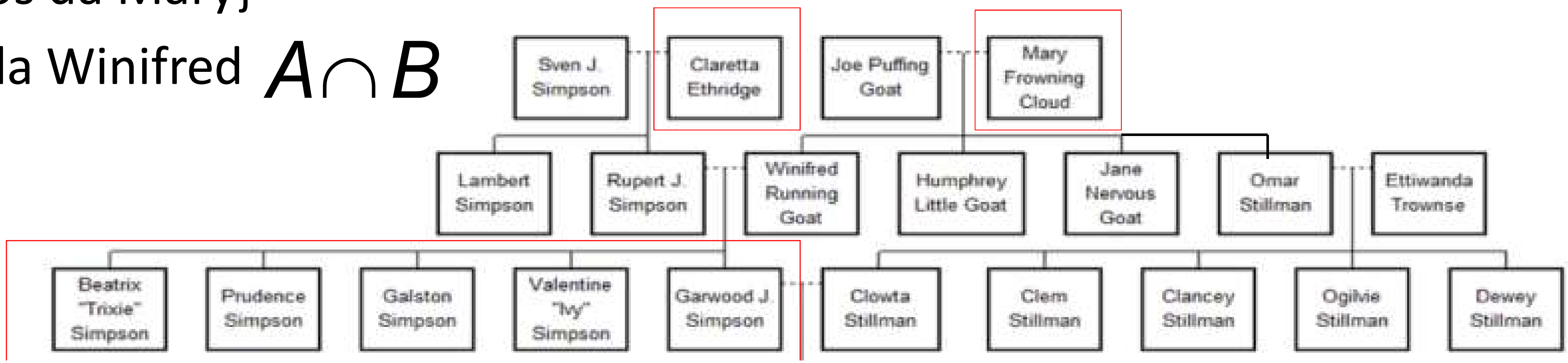
{x | x ∈ A e X ∈ B}

Exemplo:

A={netos da Claretta}

B={netos da Mary}

Filhos da Winifred $A \cap B$



Complemento

- Sejam A em $\zeta(S)$, o complemento de A

Denotada por A’

$\{x \mid x \in S \text{ e } x \in A\}$

Exemplo:

M=mulheres

M’= não mulheres

Diferença

- Sejam A e B em ζ(S) , A DIFERENÇA A-B

$\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Exemplo:

M=mulheres

I=pessoas com mais de 60 anos

M-I= mulheres com menos de 60 anos

Propriedade da teoria de conjuntos

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Comutatividade
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Associatividade
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributividade
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap S = A$	Existência de elemento neutro
$A \cup A' = S$	$A \cap A' = \varnothing$	Propriedades do complemento

Diagrama de Venn

- Representação gráfica de propriedades envolvendo conjuntos

Exemplos:

As provas de recuperação em matemática e física de uma escola foram feitas no mesmo dia e durante a prova, observou-se a presença de 42 alunos. Sabendo-se que 25 alunos fizeram a prova de matemática e 32 fizeram a de física, determine:

a) O número de alunos que fizeram as duas provas;
b) O número de alunos que fizeram apenas a prova de matemática;
c) O número de alunos que fizeram apenas a prova de física.

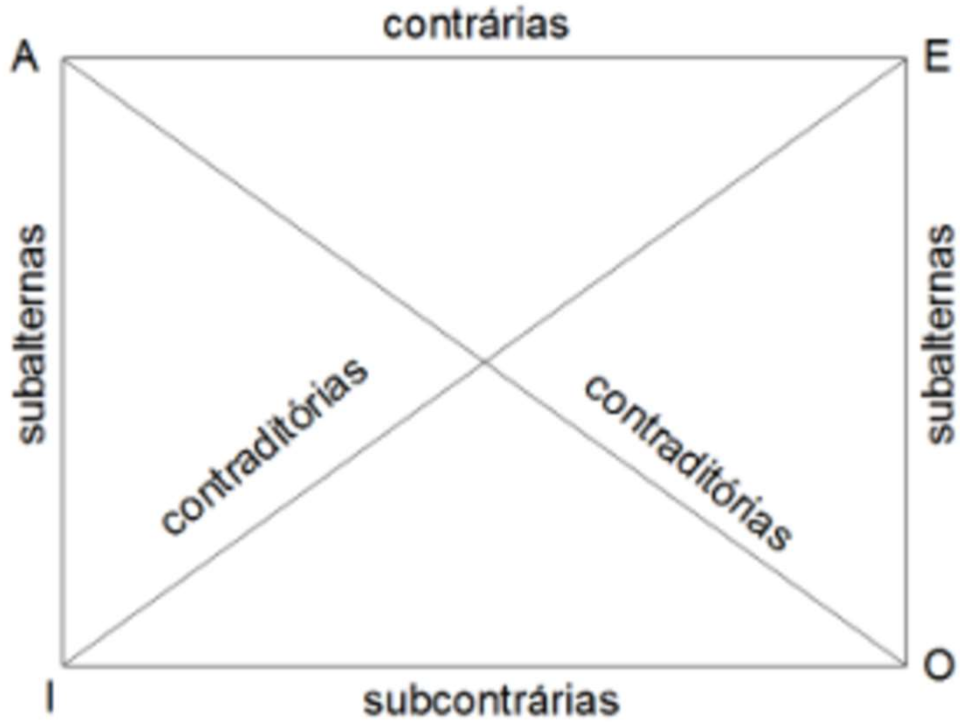
Numa pesquisa sobre a qualidade dos serviços oferecidos pelas empresas de fornecimento de água (A), energia elétrica (E) e TV por assinatura (T) de um bairro, obteve-se um grande número de reclamações.
A tabela a seguir expressa o número de reclamações de 300 entrevistados durante a pesquisa.

Serviços	A	E	T	A e E	E e T	A e T	A, E e T
Reclamações	160	180	190	120	100	110	90

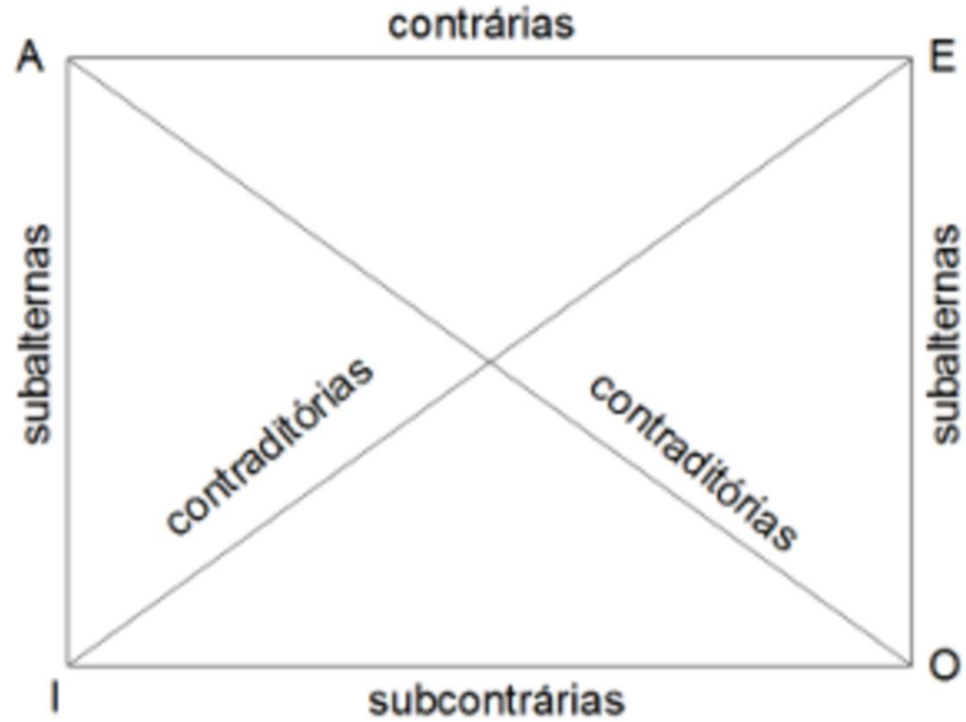
Com base na tabela, determine:

a) O número de pessoas que não reclamaram de nenhum serviço;
b) O número de entrevistados que reclamaram apenas do serviço oferecido pela empresa de fornecimento de água;
c) O número de entrevistados que reclamaram de apenas um serviço;
d) O número de entrevistados que reclamaram de pelo menos dois serviços.

Validade o argumento: Tábua de Oposições



Validade o argumento: Tábua de Oposições



Tábua de oposições

1

Tipos de proposições e exemplos:

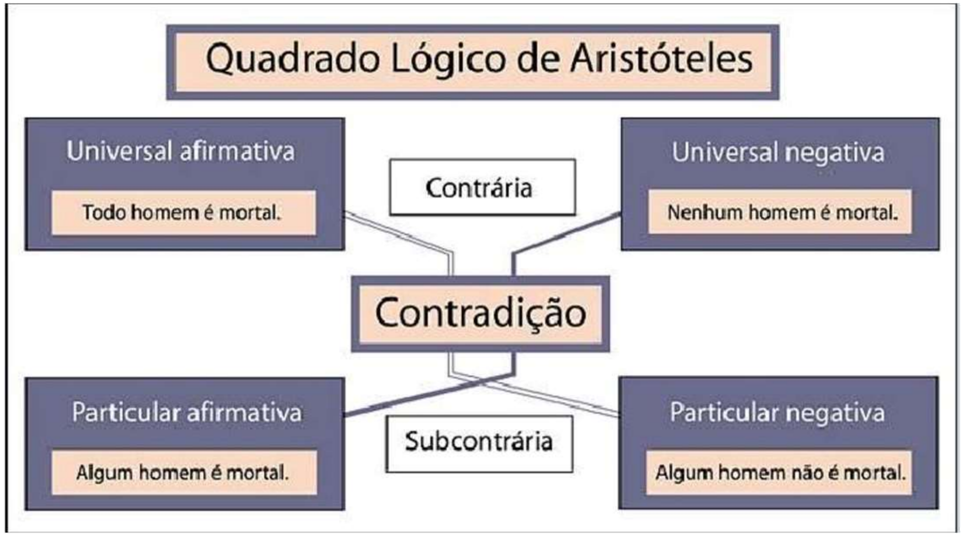
- A: afirmação universal (todo homem é mortal)
- E: negação universal (nenhum homem é mortal)
- I: afirmação particular/existencial (algum homem é mortal-> alguém é mortal)
- O: negação particular (algum homem não é mortal)

2

Relacionamento entre as proposições:

- A e E são ditos contrárias; se a proposição A for verdadeiras então E será falsa
- A e O e também E e I são contraditórias: não podem ser verdadeiras nem falsas conjuntamente
- I e O são subcontrárias: não podem ser ambos falsos
- I é subalterna de A, e O é subalterna de E; se A for verdadeira, I também a será e se E for verdadeira então O também será.

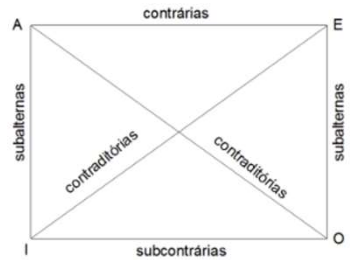
Tábua de Oposições



Leis do quadrado lógico

- Regra das contrárias: duas proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo
- Regra das contraditórias: duas proposições contraditórias não podem ser nem verdadeiras nem falsas ao mesmo tempo
- Regra das subcontrárias: duas proposições subcontrárias não pedem ser ambas falsas ao mesmo tempo

Exemplos: uso de regras



- **<u>Contraditórias</u>**: as proposições diferem na quantidade e na qualidade
  - A. Todos os advogados são juristas.
  - O. Alguns advogados são juristas.
  - E. Nenhum advogado é jurista.
  - I. Alguns advogados são juristas.

  Não podem ser <u>verdadeiras</u> nem <u>falsas</u> ao mesmo tempo.

  Se A é verdadeira, O é falsa
  Se E é verdadeira, I é falsa
- **<u>Contrárias</u>**: as proposições são universais, mas diferem na qualidade
  - A. Todos os advogados são juristas.
  - E. Nenhum advogado é jurista.

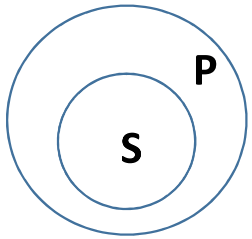
  Não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo, mas podem ser falsas ao mesmo tempo
- **<u>Subcontrárias</u>**: ambas as proposições são particulares, diferem na qualidade
  - I. Alguns advogados são juristas.
  - O. Alguns advogados não são juristas.
  - Podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo.

  Não podem ser as duas falsas ao mesmo tempo.
- **<u>Subalternas</u>**: ambas as proposições são afirmativas ou negativas, diferem na quantidade
  - B. Todos os advogados são juristas.
  - O. Alguns advogados são juristas.
  - E. Nenhum advogado é jurista.
  - I. Alguns advogados são juristas.

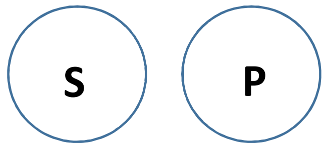
  Se a universal é verdade, a particular é verdadeira
  Se a particular é falsa, a universal é falsa.
  Distribuição dos termos

Conceitos básicos: Diagrama Venn-Euler

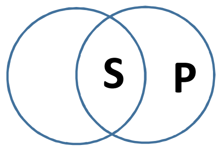
- Proposição A: Inclusão total
  (todo S é P)



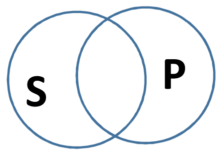
- Proposição A: Exclusão total
  (nenhum S é P)



- Proposição A: Inclusão parcial de S em P
  (Algum S é P)



- Proposição A: Exclusão parcial de S em P
  (algum S não é P)



Conceitos básicos: silogismo

1

Raciocínios lógicos na forma de sequências de proposições geradas por inferências imediatas obtidas da tábua de oposições.

2

Um <u>**silogismo**</u> é um discurso no qual, dadas proposições premissas, uma nova proposição conclusão é obtida necessariamente e unicamente a partir das premissas. Forma:

- Premissa maior
- Premissa menor
- Conclusão

3

O termo menor (S) é o sujeito da conclusão,

o **termo maior (P)** é o predicado da conclusão,

e o **termo comum** às premissas é o termo médio **(M).**

Conceitos básicos: silogismo

1

Exemplos:

- Todos os mamíferos são vertebrados (premissa maior)
- Todos os homens são mamíferos (premissa menor) portanto
- Todos os homens são vertebrados (conclusão).

2

Neste caso, o termo menor S é "todos os homens", o termo maior P é "vertebrados", e o termo médio M é "mamíferos".

3

Forma do silogismo:

- MP
- SM
- SP
- Todas as proposições: tipo A.

Conceitos básicos: silogismo

- Nem todos os silogismos são validos
- O estudo da logica desde Aristóteles buscou identificar os silogismos válidos, ou seja, aqueles que a conclusão segue necessariamente as premissas
- Pode-se deduzir a validade ou não de um silogismo a partir de diagramas de Venn-Euler correspondentes
- Exemplo
  - Nenhum peixe (M) é mamífero(P) <tipo E>
  - Todos os robalos (S) são peixes (M) <tipo A>

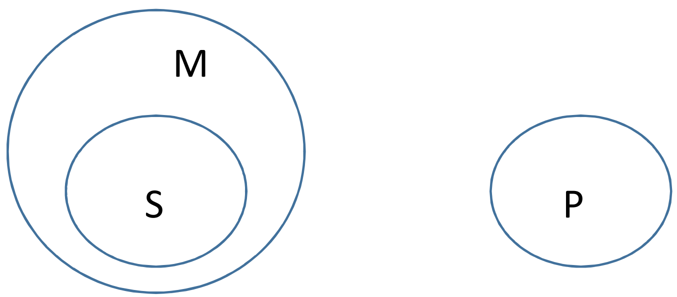
  Portanto
  - Nenhum robalo(S) é mamífero (P) <tipo E>

  Esquematicamente

  MP <E>

  SM<A>

  SP<E>



Exercício em sala

- Todos os animais venenosos (___) são perigosos (___) <tipo__>
- Algumas serpentes (___) são animais venenosos (___) <tipo__>

Portanto

- Algumas serpentes (___) são perigosas (___) <tipo___>

Esquematicamente

- Diagrama de Venn-Euler

Exercício em sala: resposta

- Todos os animais venenosos (_M_) são perigosos (_P_) <tipo A >
- Algumas serpentes (_S_) são animais venenosos (_M_) <tipo I >

Portanto

- Algumas serpentes (_S_) são perigosas (_P_) <tipo I >

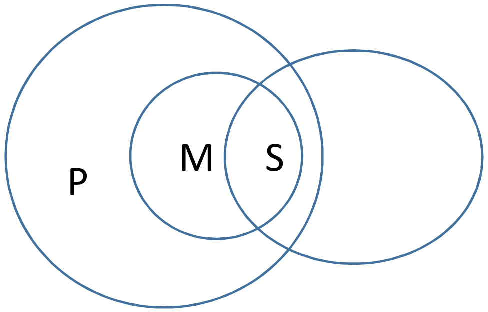
Esquematicamente

MP <A>

SM <I>

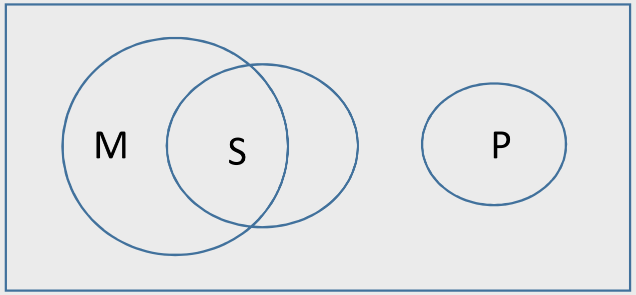
SP <I>

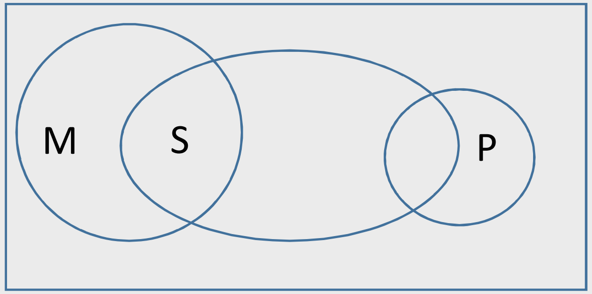
- Diagrama de Venn-Euler

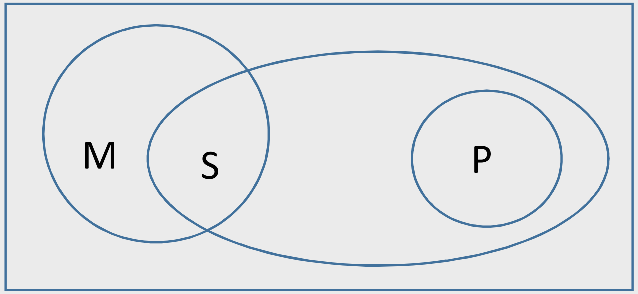


Conceitos básicos: silogismo

- Em alguns casos , os diagramas de Venn-Euler apresentam o inconveniente de admitir para um mesmo silogismo varias representações geométricas
  - Exemplo
    - MP<E>
    - SM<I>
    - SP<O>







Conceitos básicos: silogismo

1

Verdade e validade (ou correção)

- Um silogismo é válido (correto) se e somente se (SSE)
  a verdade da conclusão segue necessariamente da verdade das premissas
- Os silogismos portanto transmitem a verdade das premissas na conclusão
- Esta definição exclui a possibilidade de que um silogismos válido possa ter premissas verdadeiras e conclusão falsa

- Isto não exclui a possibilidade de que
  a conclusão de um silogismo válido seja falsa,
  neste caso alguma das premissas é falsa

2

Exemplo

- Todos os animais marinhos são peixes
- todas as baleias são animais marinhos

Portanto

- todas as baleias são peixes

Exercícios

1. Indique a forma do silogismos (termos, figura e diagrama) e indique se o mesmo é válido ou não:
   a) Todos os brasileiros são homens
      Todos os cariocas são brasileiros

      Todos os cariocas são homens
   b) Todos os socialistas são marxistas
      Alguns governantes são marxistas

      Alguns governantes são socialistas
   c) Todas os separações litigiosas são atos cruéis
      Todos os divórcios são separações litigiosas

      Todos os divórcios são atos cruéis

Exercícios

- Continuando...:
  c) Alguns gatos não são animais selvagens
  Todos os gatos são animais de estimação

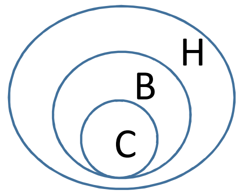
  Nenhum animal de estimação é selvagem
  d) Nenhum modelo é uma pessoa feliz
  Alguns atores não são pessoas felizes

  Alguns atores não são modelos
  e) Todas os cavalos são corredores velozes
  Alguns cachorros são corredores velozes

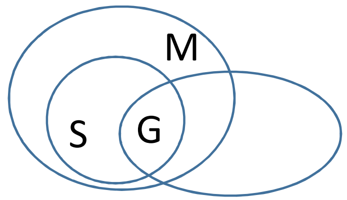
  Alguns cachorros são cavalos

Exercícios--Respostas

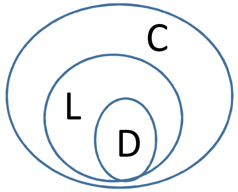
1. Indique a forma do silogismos (termos, figura e diagrama) e indique se o mesmo é válido ou não:
   a) Todos os brasileiros são homens
      Todos os cariocas são brasileiros
      ___
      Todos os cariocas são homens



   b) Todos os socialistas são marxistas
      Alguns governantes são socialistas
      ___
      Alguns governantes são marxistas



   c) Todas os separações litigiosas são atos cruéis
      Todos os divórcios são separações litigiosas
      ___
      Todos os divórcios são atos cruéis



Premissa maior
Premissa menor
Conclusão

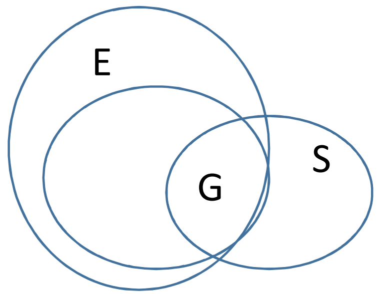
Exercícios--Respostas

Não é argumento válido

- Continuando...:

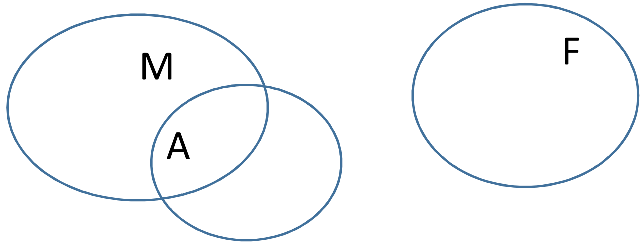
Não Ok

c) Alguns gatos não são animais selvagens
Todos os gatos são animais de estimação
Nenhum animal de estimação é selvagem



Ok

d) Nenhum modelo é uma pessoa feliz
Alguns atores são modelos
Alguns atores não são pessoas felizes



Não Ok

e) Todas os cavalos são corredores velozes
Alguns cachorros são corredores velozes
Alguns cachorros são cavalos