Indução Matemática

Curso de Introdução à Lógica Computacional

Indução Matemática: definição

- **Processo de prova** ou demonstração de propriedades definidas sobre o conjunto dos **números inteiros** que, **baseada** numa quantidade finita de **observações**, estende e **generaliza a propriedade** para todo o conjunto dos números inteiros.

Princípio da indução matemática

Seja P(n) uma função proposicional definida para todos os números inteiros positivos n.

P(n) será verdade para cada número inteiro n se:

Princípio da indução matemática

Seja P(n) uma função proposicional definida para todos os números inteiros positivos n.

P(n) será verdade para cada número inteiro n se:

- 1- PASSO BASE
  - A proposição P(1) for verdadeira
- 2-PASSO INDUTIVO
  - Se P(k) for verdadeiro Então P(k+1) será verdadeiro para todos os números inteiros k>=1
    - $P(k) \rightarrow P(k+1)\ \forall k$

Exemplo1: Prove P(n):1+2+3+...+n= n(n+1)/2 para n>=1

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{1+2+3+\ldots+n} = \boxed{n(n+1)/2}$ para $n>=1$

- **PASSO BASE:**
- P(1) é verdadeiro. Para n=1
- Lado esquerdo: 1
- Lado direito: 1*(1+1)/2=1
- Logo P(1) realmente é verdadeiro

- **PASSO INDUTIVO:**
- Assuma que P(k) é verdadeiro para k>=1

$$\boxed{P(k)=k(k+1)/2}$$

TEMOS QUE PROVAR QUE P(k+1) é True

- Consideremos n=k+1

$$\boxed{1+2+3+\ldots+k+1} = \boxed{(k+1)(k+1+1)/2}$$

$$\boxed{1+2+3+\ldots+k}+k+1$$

$$k(k+1)/2+(k+1)$$

$$(k+1)(k/2+1)$$

$$\boxed{(k+1)(k+2)/2}$$

Exemplo2: Prove $P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para $n>=1$

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{1+3+5+...+(2n-1)} = \boxed{n^2}$ para $n>=1$

- **PASSO BASE:**
- P(1) é verdadeiro. Para n=1
- Lado esquerdo: 1
- Lado direito: $1^2=1$
- Logo P(1) realmente é verdadeiro

- **PASSO INDUTIVO:**
- Assuma que P(k) é verdadeiro para k>=1

$$\boxed{1+3+..+(2k-1)=k^2}$$

TEMOS QUE PROVAR QUE P(k+1) é True

- Consideremos n=k+1

$$\boxed{1+3+...+(2(k+1)-1)} = \boxed{(k+1)^2}$$

$$\boxed{1+2+3+...+(2k-1)}+(2(k+1)-1)$$

$$k^2+(2k+1)$$

$$k^2+2k+1$$

$$\boxed{(k+1)^2}$$

Exemplo3: Prove $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para n>=1

1. Passo BASE
   Mostre que é verdade para n = 1

$$S_n = 1^2 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

2. PASSO INDUTIVO
Assuma que S_k é verdadeiro

$$S_k = \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Mostre que $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ É verdadeiro

Exemplo3: Prove $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para n>=1

$S_{k+1} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

Fatorando (k + 1)

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Exemplo4: Prove P(n): $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n>=0$

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n} = \boxed{2^{n+1} - 1}$ para $n>=0$

- **PASSO BASE:**
- P(0) é verdadeiro. Para n=0
- Lado esquerdo: P(0)=1
- Lado direito: $2^{(0+1)} - 1 = 1$
- Logo P(0) realmente é verdadeiro

- **PASSO INDUTIVO:**
- Assuma que P(k) é verdadeiro para k>=0

$$\boxed{1+2+2^2+\ldots+2^k=2^{k+1} -1}$$

TEMOS QUE PROVAR QUE P(k+1) é True

- Consideremos n=k+1

$$\boxed{1+2+2^2+\ldots+2^{k+1}} = \boxed{2^{(k+1+1)} - 1}$$

$$\boxed{1+2+2^2+\ldots+2^k}+2^{k+1}$$

$$(2^{k+1} -1) + 2^{k+1}$$

$$2*2^{k+1} -1$$

$$\boxed{2^{k+1+1} -1}$$

Exemplo5: Prove P(n): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ para n>=1

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}=\boxed{\frac{n}{n+1}}$ para n>=1
- **PASSO BASE:**
- P(1) é verdadeiro. Para n=1
- Lado esquerdo: P(1)=1/2
- Lado direito: 1/(1+1) =1/2
- Logo P(1) realmente é verdadeiro

Exemplo5: Prove P(n): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ para n>=1

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}}=\boxed{\frac{n}{n+1}}$ para n>=1

- **PASSO INDUTIVO:**
- Assuma que P(k) é verdadeiro para k>=1

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

- Consideremos n=k+1

TEMOS QUE PROVAR QUE P(k+1) é True

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k+1(k+1+1)}=\frac{k+1}{k+1+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}}+\frac{1}{k+1(k+1+1)}$$

$$\frac{k}{k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k\,(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{(k+1)}{(k+2)}$$

Exemplo5: Prove P(n): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ para n>=1

Lado esquerdo

Lado direito

- $\boxed{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}} = \boxed{\frac{n}{n+1}}$ para n>=1

- **PASSO INDUTIVO:**
- Assuma que P(k) é verdadeiro para k>=1

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

- Consideremos n=k+1

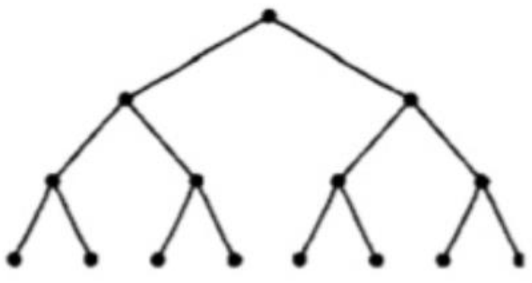
TEMOS QUE PROVAR QUE P(k+1) é True

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{k+1(k+1+1)} = \frac{k+1}{k+1+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{k+1(k+1+1)}$$

Exercicio6: Demonstração Intuitiva

- Assuma que o Sr. Silva casou-se e teve 2 filhos. Vamos chamar estes 2 filhos de geração 1. Agora assuma que cada um desses 2 filhos teve 2 filhos também. Então na geração 2 temos 4 descendentes. Este processo continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva é semelhante à:



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^1$

Exercicio6:Demonstração Intuitiva

- Aparentemente a geração n tem 2^n descendentes. Se fizermos P(n) denotar pelo numero de descendentes da geração n, então nossa suposição será que
- $P(n)=2^n$

- Podemos usar a indução para demonstrar nosso palpite
- Base: $P(1)=2^1=2$ (correto)
- Passo indutivo: assume-se que $P(k)=2^k$
- tentaremos demonstrar que $P(k+1)=2^{k+1}$
- $P(k+1)=2*2^k=2^{k+1}$

Exercício7: Prove que qualquer postagem de correio de 12 centavos ou mais pode ser formado por conjunto de selos de 4 centavos e 5 centavos

Exercício7: Prove que qualquer postagem de correio de 12 centavos ou mais pode ser formado por conjunto de selos de 4 centavos e 5 centavos

- Minha hipótese P(n)= 2 n* 5cents + n* 4cents/2, para n>=12 (pensei no caso base
  - Passo Caso BASE P(1)= 2*1* 5cents + 1* 4cents/2 → Perfeito
  - Passo Indutivo Assuma: P(k)= 2*k* 5cents + k* 4cents/2 é verdade
  - P(k+1)= 2*(k+1)* 5cents + (k+1)* 4cents/2
  - 2k* 5cents + 2* 5cents + k*4cents/2 + 4cents/2
  - 4k* 5cents + 4* 5cents + k*4cents+ 4cents
  - 4k* 5cents + k*4cents+ + 4* 5cents+ 4cents
  - 2*(2k* 5cents + k*4cents/2)+ 2*(2* 5cents+ 4cents/2)
  - 2*P(k)+ 2*P(1)

Exercícios

- Prove:
  - 1. $n^2 > n + 1$ para $n>=2$
  - 2. $n! < n^n$ para $n >=2$
  - 3. . Uma pitoresca tribo nativa tem apenas três palavras na sua língua, cuco, cuca e caco. Novas palavras são compostas pela concatenação destas palavras em qualquer ordem, por exemplo cucacucocacocuca. Use a indução completa (para o número de subpalavras na palavra) para provar que qualquer palavra nesta língua tem um número par de c 's